Tall- og algebrakunnskaper hos norske 8. klassinger

Endringer fra 1995 til 2003

Hovedfagsoppgave i realfagdidaktikk

Ellen Konstanse Hovik

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling

Universitetet i Oslo

April 2006

Forord

Interessen for fagområdet matematikkdidaktikk skriver seg fra min erfaring som matematikklærer fra 1980 og fram til skrivende stund. Jeg har undervist i grunnskolens ungdomstrinn og i 6. klasse på barnetrinnet etter L 74. Størstedelen av min matematikkundervisning har vært ved teknisk fagskole (1986 – 2003). Jeg har også undervist på grunnkurs og VK1 yrkesfaglig studieretning etter R 94 og ved forkurs for ingeniørutdanning. I et lærermiljø med mange ansatte fra ulike yrkes- og allmennfag har diskusjoner omkring hensikten med matematikkopplæring vært mange og interessante.

Jeg mener å ha sett at elevenes forkunnskaper i matematikk har blitt dårligere etter hvert, spesielt mot slutten av 1990-tallet. Dette vekket min nysgjerrighet. Stemmer det, eller har jeg blitt en lærer av typen: ”Alt var mye bedre før”? Hvis det stemmer, hvorfor er det blitt slik?

Denne hovedoppgaven er blitt til over en treårsperiode. Teoridelen i oppgaven er tema jeg underviser i til daglig ved Allmennlærerutdanningen ved Høgskolen i Oslo. Dette har ført til at motivasjonen har holdt seg oppe det meste av tiden. Analysen av data har vært veldig spennende, det er en form for prosess som jeg finner morsom og interessant.

Flere personer har hjulpet meg underveis. Først og fremst min hovedfagsveileder Liv Sissel Grønmo som har bidratt med interessante og oppklarende diskusjoner og god veiledning underveis. Tusen takk!

Jeg vil også takke Svein Lie som har gitt meg meget nyttig veiledning spesielt knyttet til metode- og analysedelen, Marion Caspersen for hjelp med ulike praktiske spørsmål og min søster Sissel Hovik som påtok seg oppgaven med å lese gjennom verket opptil flere ganger med et utenfra blikk.

Generelt vil jeg takke kolleger ved HIO for oppmuntring underveis og tilrettelegging av arbeidstid slik at det ble overkommelig å bli ferdig. Sist men ikke minst vil jeg takke venner og familie for all støtte.

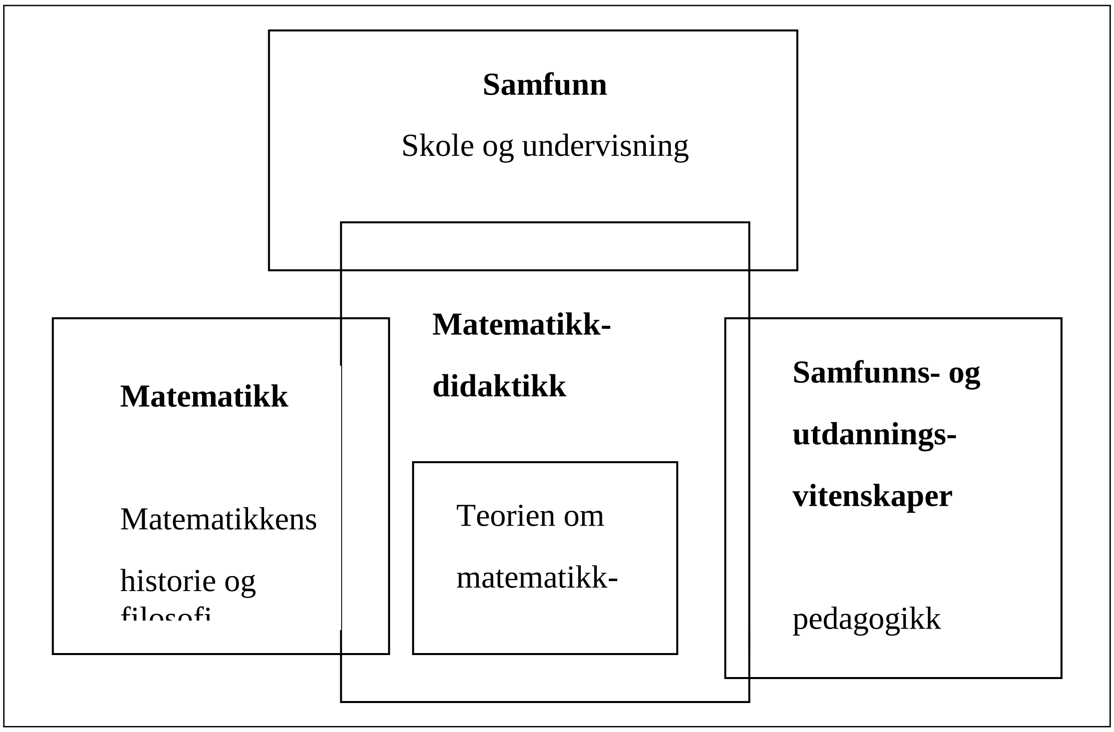
Oslo, april 2006

Ellen Konstanse Hovik

Innhold

1. Innledning

Dette er en hovedfagsoppgave innen fagområdet matematikkdidaktikk. Det er et relativt nytt vitenskapsområde som har etablert seg internasjonalt i perioden fra slutten av 1950-tallet (Brekke & Gjone 2001). Matematikkdidaktikkens forhold til andre fagområder kan framstilles ved figur 1.1 som er hentet fra Brekke & Gjone (2001), s. 243. Faget omhandler i prinsippet alt som berører undervisning og læring i matematikk.



Figur 1.1: Matematikkdidaktikkens "plassering" i et fagdidaktisk perspektiv

Oppgaven dreier seg i hovedsak om å undersøke norske 13/14-åringers kunnskaper i matematikkemnene tall og algebra. Den starter med en teoretisk del. Her vil jeg presentere og redegjøre for noen læringsteorier som har betydning for synet på matematikk og matematikkundervisning. Enkelte sentrale læringsteoretikere får egen omtale. Teoridelen omfatter også gjennomgang av teori knyttet til begrepsutvikling og undervisning i matematikk generelt og i matematikkemnene tall og algebra. Jeg vil komme med egne refleksjoner underveis i den teoretiske delen. Basis for teoridelen er litteraturstudier av læringsteorier og av forskning innen fagområdet matematikkdidaktikk.

Etter denne teoridelen kommer en gjennomgang av læreplaner. De norske elevene som har deltatt i undersøkelsen har blitt undervist etter to ulike læreplaner, *M 87* og *L 97*. M 87 er mønsterplan for grunnskolen (9-årig) som gjaldt fra 1987. L 97 er læreplanverket for den 10-årige grunnskolen som gjaldt fra 1997. Denne delen inneholder først en presentasjon av læreplanteori, så en analyse av de aktuelle læreplaner i lys av første del av oppgaven. En oppsummering av emnene tall og algebra i læreplanene kommer til slutt. Fra høsten 2006 vil det foreligge nye læreplaner. Disse "*Læreplaner for Kunnskapsløftet*" vil foreligge i endelig form våren 2006 og kalles også L 06. Siden deltagerne i min undersøkelse ikke er undervist etter denne læreplanen, vil den ikke vektlegges i denne delen.

Empiridelen omfatter i hovedsak en analyse av elevresultater for et utvalg av matematikkoppgaver innenfor tall og algebra gitt til elever i 1995 og i 2003. Svar på spørsmål stilt til de samme elevene og deres lærere om matematikkundervisning analyseres også. Det viktigste i denne delen vil være å se etter endringer i resultater fra 1995 til 2003. Forut for empiridelen presenteres de metoder som er anvendt i denne sammenheng. Oppgavetekster, tabeller og figurer vil i hovedsak plasseres der de omtales. Noen tabeller er plassert i Appendiks.

Siste del av oppgaven er en diskusjon hvor resultater og analyser fra empiridelen knyttes sammen med teoridelene. I en kort oppsummering vil jeg presentere spørsmål som oppgaven reiser og som jeg finner at det kunne være interessant å se mer på. Her vil L 06 omtales.

Alle data til empiridelen er hentet fra *TIMSS*-undersøkelsene i 1995 og i 2003. Før 1999 sto forkortelsen TIMSS for *The Third Internatianal Mathematics and Science Study*. I 1999 ble dette endret til *The Trends in Internatianal Mathematics and Science Study*.TIMSS er et prosjekt i regi av *The International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA). Denne organisasjonen har drevet sammenliknende internasjonale studier siden rundt 1960. Den nyeste undersøkelsen hittil er TIMSS 2003. Denne følger en regulær syklus av tilsvarende undersøkelser som startet med TIMSS 1995 med 45 deltagerland og fortsatte med TIMSS 1999. Norge deltok i 1995, 2003 og vil delta i 2007. Dette gir en mulighet til å måle trender i elevers prestasjoner i matematikk og naturfag mellom nasjonene som deltar og internt i hver nasjon. TIMSS presenteres nærmere i metodekapitlet.

En annen internasjonal undersøkelse hvor Norge deltar er *PISA (Programme for International Student Assessment)* i regi av OECD. Jeg bruker ikke data fra denne undersøkelsen, men den refereres ved et par anledninger i oppgaven min. Undersøkelsen går i korthet ut på å måle 15-åringers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag. PISA bruker begrepet *Matematics literacy* om matematikkunnskaper. Dette begrepet forklares nærmere i kapittel 3 (for mer om PISA, se Kjærnsli mfl. 2004).

Generelt vil jeg redegjøre for begreper som brukes i oppgaven underveis når begrepene anvendes.

Kritikk av internasjonale sammenliknende undersøkelser som TIMSS og PISA kommer fra ulike hold og kunne i seg selv være interessant å se på. Dette er ikke tema i min oppgave. Mitt hovedfokus er et utvalg av matematikkoppgaver og utviklingen for disse innad i Norge.

1.1 Problemstilling

Algebra er grunnleggende for mye av matematikken i læreplanene i videregående skole og teknisk fagskole. Gode kunnskaper her er viktig. Grunnlaget for algebra er god tallforståelse (Brekke mfl. 2000). I denne oppgaven har jeg derfor valgt å konsentrere meg om matematikkemnene tall og algebra.

Muligheten for å se på trender internt i Norge er en begrunnelse for å velge å bruke TIMSS–data. Jeg ønsker å undersøke om det er mulig å finne endringer i tallforståelse og algebra hos norske 13/14-åringer fra 1995 til 2003. Valget av akkurat denne aldersgruppen skyldes at dette er et av alderstrinnene det fokuseres på i TIMSS. Egen erfaring som lærer på ungdomstrinnet og at det er denne aldersgruppen i TIMSS som er nærmest til å begynne på videregående/teknisk fagskole er også begrunnelser for mitt valg. Resultatene for denne gruppen vil dermed ligge nærmest den elev/studentgruppen jeg har arbeidet med i alle år.

En del matematikkoppgaver har blitt brukt både i 1995 og i 2003. Kategoriene tall og algebra har vært med begge ganger. Dette gjør at TIMSS-dataene kan gi meg mulighet til å prøve å finne ut noe om hvorvidt matematikkunnskapene hos norske elever har endret seg i løpet av 90 – tallet. Jeg vil i tillegg bruke data fra elevspørreskjema og lærerspørreskjema i TIMSS for å se om disse kan antyde forklaringer på eventuelle endringer.

1.1.1 Forskningsspørsmål

- Hvilke eventuelle endringer finner vi i tallkunnskaper for norske 13/14-åringer i tidsrommet 1995 – 2003?
- Hvilke eventuelle endringer finner vi i algebrakunnskaper for norske 13/14-åringer i tidsrommet 1995 – 2003?
- Hvilken betydning kan læreplanene tenkes å ha for de endringer vi finner?
    - Hvilke læringsteorier kan antas å påvirke læreplanene?
    - Hvilke ulike syn på matematikk og matematikkundevisning finnes i M 87 og L 97?
    - Hvilke ulikheter i syn på arbeidsmetoder og organisering av undervisning avspeiler seg i L 97 og M 87?
- Hvilke endringer i arbeidsmetoder og organisering av matematikkundervisningen ses de senere år?

2. Teoridel

2.1 Aktuelle læringsteorier og læringsteoretikere

Epistemologi er en vitenskap som er opptatt av spørsmål om hva kunnskap er og hvordan den dannes. Dannes kunnskap i eller utenfor individet? Finnes det kollektiv kunnskap? Hva er dens relasjon til personlig kunnskap? To ulike syn på læring er *behaviorisme* og *konstruktivisme.*

2.1.1 Behaviorisme

I følge behaviorismen er det den ytre adferd som ansees som virkelig og reell. Man kan ikke studere kognitive aktiviteter ved hjelp av objektive metoder, dermed velger man å ikke fokusere på dette. Behaviorismen er nært beslektet med vitenskapstradisjonene positivisme og logisk empirisme (Säljø 2000). Det er viktig med objektive vitenskapelige metoder, og med observerbarhet. Behaviorismen bygger på den russiske fysiolog og psykolog Pavlovs studier av hunder og deres såkalte *betingede reflekser* som forenklet kan forklares som en tillært kobling mellom stimulus og respons. At hunder begynner å sikle når den personen som vanligvis gir dem mat kommer inn i rommet er eksempel på en slik reaksjon. En behaviorist forestiller seg at mer sammensatt adferd er kjeder av kompliserte betingingsprosesser, der menneskelige reaksjoner er resultat av mer og mer avanserte former for betinging. Denne tankegangen har store begrensninger i henhold til mennesket, da den bare fungerer på refleksadferd (Säljö 2000).

B.F. Skinner (1904-1990) var en amerikansk psykolog som arbeidet innenfor en behavioristisk tradisjon og knyttet det nærmere til mennesket (Säljö 2000). Han snakker om såkalt *operant betinging* som forenklet handler om at hvis man belønner adferden til et levende vesen vil denne adferden bli vanligere. Det er Skinners modell som har fått betydning for det behavioristiske læringssyn som har vært vanlig i skolen, spesielt rundt midten av forrige århundre.

Et syn på læring som bygger på en behavioristisk tilnærming, vil se på læring som noe som kan styres utenfra, adferden kan endres utenfra. Eleven ses på som et objekt som kan motta kunnskap fra andre gjennom en vekselvirkning av stimulus og respons. I deler av 1900 -tallet var dette synet vanlig å legge til grunn for opplæring i skolen. Kunnskapen ses som noe fast definert og utenfor individet, objektiv og absolutt. Den kan avgrenses i små enheter og kan bygges opp stein for stein (Säljö 2000, Alseth mfl. 2003). Å bygge opp kunnskaper skrittvis gjennom gjennomgang av nytt stoff, individuell utprøving, ny gjennomgang (repetisjon) hvor elevene hele tiden får tilbakemeldinger som fungerer forsterkende kan følge et behavioristisk kunnskapssyn. Samtidig har tanken om at alt kan sees på som ytre adferd sine klare begrensinger når det kommer til mennesker. Blant annet kommuniserer vi ved hjelp av språk i vid forstand (ord, stemmeleie, mimikk, gestikulering, klær og smykker og så videre). Skinner prøvde å forklare også dette ved hjelp av forsterkningsprinsippet i boken ”Verbal behavior” i 1957, men boken møtte massiv kritikk og ble et skudd for baugen for behaviorismens forsøk på å forklare kompleks menneskelig adferd (Säljö 2000).

2.1.2 Kognitivisme og konstruktivisme

Konstruktivismen er det elementet i den *kognitive* tradisjon som har fått størst innflytelse på synet på læring (Säljö 2000). Mens behaviorismen har et empirisk syn på læring, har kognitivismen et rasjonalistisk syn. Det har i følge Säljö (2000) skjedd en pendling mellom disse perspektivene gjennom historien. Et empirisk perspektiv stiller sterke krav til observerbarhet og metodisk presisjon. Behaviorismen utgjorde i sin tid en reaksjon på ulike psykologiske retninger som var opptatt av å studere menneskets sjelsliv. Disse retningene var preget av "*uverifiserbare mystifiseringer av mennesket*" (Säljö 2001, s. 56), bla a raseteorier. Det lyktes å skape fotfeste for et empirisk syn på læring i behaviorismens gullalder. Tenkning og mentale aktiviteter kom igjen på banen ved retur til en rasjonalistisk tradisjon hvor kognitivismen hører hjemme. Dette er en tradisjon hvor mentale aktiviteter er sentrale, med et klart skille mellom kropp og sjel.

Behaviorismen forutsetter at det finnes objektive sannheter uavhengig av enkeltmennesker. Dette betyr at matematikk sees på som objektivt og absolutt, som oppdaget av mennesket, ikke oppfunnet. Konstruktivister mener at individet konstruerer sin egen forståelse av verden rundt seg gjennom egen aktivitet. Siden alle danner sine egne begreper, vil kunnskapen være subjektiv og relativistisk. Å snakke om hva som er sant/usant, rett eller galt er avhengig av øyet som ser, altså det subjektive mennesket. Dette synet framhever også individet på "bekostning" av samfunnet og er et kjennetegn for postmodernismen. Fokus flyttes fra det kollektive til individet.

Konstruktivismen kan grovt deles inn i *kognitivt orientert konstruktivisme* og *sosial orientert konstruktivisme*. Kognitivt orienterte konstruktivister fokuserer på det som skjer mentalt hos det enkelte individ, mens sosialkonstruktivister fokuserer mer på samhandling mennesker i mellom. Kjennetegnet for *sosialkonstruktivismen* er at man studerer kollektiv kunnskap og dens relasjon til personlig kunnskap og til egenskaper i den reelle verden. Noen vil mene at all kunnskap er konstruert og ikke oppfattet gjennom sansing: "*Denne prosess (kunnskapsoppnåelse) innebærer ikke oppdagelsen av en uavhengig, på forhånd eksisterende verden utenfor subjektet*" (Björkqvist 1993, s.8). Disse benevnes som *radikale konstruktivister* og vil kun anse personlig kunnskap som kunnskap (Björkqvist 1993).

2.1.3 Sosialkonstruktivismen og et sosiokulturelt perspektiv på læring

Paul Ernest er professor i the Philosophy of Mathematics Education ved University of Exeter, School of Education. Han hevder at sosialkonstruktivismens epistemologi visselig er relativistisk, men at det er snakk om en forsvarlig relativisme. I matematikksammenheng sier han at et av problemene med et relativistisk syn som sosialkonstruktivismen, er å gi opp kjennetegn for matematisk kunnskap som nødvendighet, stabilitet og selvstendighet (Ernest 1998). Ifølge Ernest finnes det noe som er i nærheten av universalisme og objektivisme når det gjelder matematikk. "*Many people at many times in many cultures have been or could be brought to agree on the assessment of meaning, truth and existence in mathematics*" (Ernest 1998, s. 250). Men samtidig skapes matematikken i en sosial, kulturell og historisk setting og dermed er det ingen garanti for at en universell forståelse og vurdering vil være oppnåelig for alle mennesker til alle tider.

Ole Björkqvist er professor i realfagsdidaktikk ved Avdeling for lærerutdanning, Åbo Akademi i Finland. Han velger å bruke begrepet kollektiv kunnskap om kunnskap som bygges opp av en gruppe mennesker (Björkqvist 1993). Et kjennetegn ved denne kunnskapen, er at den har vist seg livskraftig. Han sier at konstruktivister generelt unngår å bruke begrepet ”oppdage” i forbindelse med individets kunnskapskonstruksjon, men at dette begrepet ikke bekymrer en sosialkonstruktivist.

> *”Att en elev upptäckar något innebär att han på basen av sine erfarenheter i den sociala värld där matematiken är skapad och existerar åstedkommer en utanför hans tidigare scheman liggande ny konstruktion.”* (Björkqvist 1993, s.13).

I et såkalt *sosiokulturelt perspektiv* utgjør språk og kommunikasjon lenken mellom barnet og omgivelsene (Säljö 2000). Man kan derfor si at kunnskap også går fra samfunnet til individet. Siden et slikt perspektiv på læring åpner for at noe kommer utenfra og inn, hersker det uenighet om hvorvidt et sosiokulturelt perspektiv på undervisning er konstruktivistisk.

Sosialkonstruktivismen er slik jeg oppfatter den i nær slekt med et sosiokulturelt syn. Sosialkonstruktivister vil mene at siden menneskene kommuniserer gjennom et felles språk, så kan man se på kunnskap som noe som er sosialt konstruert. Selv om læring skjer inni hvert enkelt hode, er den aldri helt bare ens egen. Sosialkonstruktivismen tar avstand fra antagelsen om et universelt rasjonelt subjekt og ser på enkeltmennesket som like sosiokulturelt og tidsavhengig som matematisk kunnskap (Ernest 1998). Samtidig tar sosialkonstruktivismen avstand fra et sterkt relativistisk syn som at kunnskap må relativiseres til hver enkelt individuell kunnskapsinnehaver. Det finnes en felles kunnskap som uavhengig av enkeltindivider kan vurderes og testes av kunnskapsfellesskap som innehar tradisjoner for kunnskapsvurderinger (Ernest 1998). Begrepet kunnskapsfellesskap ser jeg som en begrunnelse for å snakke om slektskapet til et sosiokulturelt syn.

Sosialkonstruktivister beskriver altså matematikken som et sett med sosialt situerte praksiser (Ernest 1998). Matematiske objekter eksisterer bare innenfor tanke- og kultursystemer. De skapes gjennom konversasjon (Sfard 2000). Det blir ifølge Ernest (1998) meningsløst å snakke om en absolutt, reell eksistens av disse. Dette er diskursive objekter hvis eksistens mangler mening utenom i menneskelig kommunikasjon hvor de figurerer (Ernest 1998). Ernest kaller slik *kollektiv kunnskap* for objektiv kunnskap (Björkqvist 1993). Begrepet *reifikasjon* brukes av sosialkonstruktivistene om prosessen hvor matematiske objekt konstrueres både subjektivt og objektivt. Sosialkonstruktivister snakker om et gjensidig forhold mellom subjektiv og objektiv matematikkunnskap: de gjendanner hverandre og matematiske objekter i en kunnskapsdannelsessyklus (Ernest 1998).

Jeg mener at en viktig begrunnelse for matematikk som skolefag ligger i at matematikk har vist seg levedyktig og nyttig for oss. Nye generasjoner må ta del i denne kollektive kunnskapen. Ernest’ ”forsvarlige relativisme” er viktig i denne sammenheng. Et sosialkonstruktivistisk syn på matematikken vil også ha som følge et behov for å se på matematikkens sosiale ansvarlighet (Ernest 1998). Behaviorismen preges av et syn på matematikk som verdinøytral og upolitisk. Det er fortsatt en tendens til å se på regneresultater som objektive og sanne, noe man ikke stiller spørsmål ved.

2.1.4 Mulige følger for undersvisningen

Egentlig er konstruktivismen og behaviorismen etter min oppfatning teorier om hvordan mennesker skaffer seg kunnskap, ikke om hvordan undervisning i praksis skal legges opp. Men læringsteorier avspeiles i skolens læreplaner, undervisningsmetoder og evalueringsmetoder. Synet på hvordan læring skjer, får naturlig nok betydning for organisering av undervisning. Undervisningsmetoder som assosieres med et behavioristisk kunnskapssyn har fortsatt sin begrunnelse og benyttes i skolen. At lærer viser og forklarer, formidler stoffet til elevene og strukturerer det er ofte nødvendig. Tradisjonen er positiv i sin holdning til den enkeltes mulighet til å lære alt. Det kan kritiseres for å være vel optimistisk, samtidig som det er en god holdning å møte elever med. I matematikkundervisning kan man etter mitt syn heller ikke se bort fra at tanken om å bygge kunnskaper trinnvis kan ha noe for seg.

Säljö (2000) trekker fram følgende kjennetegn på det læringssyn som følger av den kognitive konstruktivismen og ikke minst Piaget (se kap. 2.1.5). Barn skal tillates å være aktive, oppdage saker på egen hånd, arbeide laborativt, styres av sin egen nysgjerrighet, av forståelse i stedet for utenatlæring. Vokseninnblanding virker forstyrrende på barns spontane aktiviteter. Lærer skal veilede, ikke undervise. Dette synet faller ifølge Säljö (2000) godt sammen med vår tids holdning om barns rett til selvbestemmelse og er optimistisk i sitt syn på barns iboende trang til å lære. Å tillate barn å aktivt søke etter kunnskap, kan bygge opp en indre motivasjon hos barnet som igjen skaper god læring. Samtidig vil etter min erfaring denne trangen til å lære noe ikke være like stor for alle fag. Barn har sine preferanser og utfordringen blir balansen mellom å konsentrere seg om det som vekker interesse og det som samfunnet mener de trenger å kunne.

Björkqvist (1993) nevner en rekke konsekvenser for matematikkundervisning som følge av en sosialkonstruktivistisk tilnærming. Noen eksempler: bruk av konkrete situasjoner, variasjon i kontekster, utvikle evnen til abstrahering, betydning av språk og samhandling, oppmerksomhet rundt at hvert enkelt individ resonnerer ulikt og at lærer har samfunnets tillitt som formidler av kulturell kapital. Det siste er etter mitt syn en konsekvens som er viktig og som begrunner vokseninnblanding..

I praksis er det etter min oppfatning slik at en mest mulig felles forståelse av begreper er viktig. At elevene konstruerer sine egne begreper mens de arbeider laborativt kan komme i konflikt med dette. Det er ikke gitt at elever konkluderer slik læreren/samfunnet ønsker, ved for eksempel eksperimentell undervisning. En lærer bør også huske på elevers og mennesker generelt sin resistens mot å gi slipp på sine ideer og oppfatninger (Bencze 2004).

Det å tilpasse seg andre mennesker er en verdi i seg selv. Å måtte samarbeide med andre som har innbyrdes ulike forutsetninger, å hjelpe til eller motta hjelp, å vente på tur og så videre hører med i en sunn utvikling. Vi lever i et samfunn hvor vi mer enn kanskje noen gang tidligere må samarbeide i yrkessammenheng. Samtidig er vi så spesialiserte at vi er praktisk avhengig av andre for å overleve. Skolen bør etter mitt syn ikke sette enkeltindividet så sterkt i sentrum at overgangen til arbeidslivet blir vanskelig.

Det er slik jeg ser det uheldig å snakke om at noen undervisningsmetoder kun hører til et konstruktivistisk eller et behavioristisk syn på læring. Dette er som før nevnt læringsteorier, ikke undervisningsoppskrifter.

> *”Rote learning, drill and practice, and passive listening to lectures can, as they always have, give rise to learning. Active learning can be mental, and so visible inactivity on the part of the learner is irrelevant. Some teaching techniques may possible be more or less efficient than others, but the constructivist view of learning does not rule out any teaching techniques in principle.”* (Ernest 2004, s. 65).

2.1.5 Piaget og Vygotsky

Dette er to teoretikere som blant mye annet er sentrale i pensumlitteratur i norsk lærerutdanning. De har hatt stor innflytelse på synet på undervisning og læring generelt og dermed også på matematikkundervisning.

Jean Piaget var sveitsisk biolog og levde fra 1896 til 1980. Han interesserte seg for og studerte psykoanalyse. Hovedinteressen ble arbeidet med hvordan kunnskap utvikler seg. Han utførte systematiske studier av barn som ble basis for hans teorier. Han mener at mennesket utvikler seg i samspill med omgivelsene og konstruerer sine kunnskaper i samhandling med disse. Piaget regnes altså som konstruktivist.

Han anvender begrepene *assimilasjon* og *akkomodasjon* som prosesser for å tilpasse seg omgivelsene. Disse er avhengig av hverandre og er deler av vår tilpasning til omgivelsene (*adapsjon*). I læringssammenheng kan vi si at assimilasjon er når det nye vi lærer passer inn i vår eksisterende kunnskapsstruktur, eller skjema. Akkomodasjon er å måtte endre strukturen for å tilegne deg kunnskapen. Det vil si at kunnskapen bryter med de forestillingene du har. Piaget mener at barn må gjennom fire bestemte stadier, som setter grenser for hva de er i stand til å lære og hvilke logiske operasjoner de kan makte å utføre. Overgangen mellom stadiene er gradvis. Samtidig er dette en rask utviklingsperiode og det er store individuelle forskjeller når det skjer. Stadiene, som er perioder med konsolidering av forståelsen, kan beskrives slik:

Senso-motorisk (0 – 3 år), *Pre-operasjonelt* (1 – 9 år), *Konkret-operasjonelt* (5 – 17 år) og *Formal-operasjonelt* fra 10 år.

Kortversjonen er at barnet går fra en oppfattelse av ting, via handlinger til å se sammenhenger og til slutt utvikle evnen til abstrakt tenking.

Lev Vygotsky (1896 – 1934) var hviterusser og litteraturforsker. Det er to grunnpilarer i Vygotskys teori, forholdet mellom kunnskap og virksomhet og forholdet mellom kunnskap og språk (Mellin-Olsen 1993). Han er opptatt av språkets betydning for læring. Språk er et verktøy som mennesker bruker i sine virksomheter. Individet har målrettede virksomheter. Læringen må sees i sammenheng med målet for læringen (Mellin-Olsen 1993). Vi kan ikke definere målene for andre, for eksempel for barna, men vi kan påvirke dem gjennom en støttende rolle. Vygotsky mener at barn har en utviklingssone, et potensial ut over den eksisterende kunnskap individet allerede har. *Proksimal sone* kaller Vygotsky denne utviklingssonen. I våre nåværende kunnskaper finnes latente kunnskaper (Säljö 2000). Vygotskys utviklingssone har ført til tanken om lærerens funksjon som et støttende stillas. Læreren er mer kompetent enn eleven og kan dermed veilede og støtte eleven. Etter hvert som eleven oppnår økt kompetanse, kan eleven beherske kompetanseområdet selv og lærer kan trekke seg tilbake (huset står ferdig, stillaset kan tas ned).

Piaget kan sies å være en individualistisk konstruktivist (Säljö 2000) og dermed en kognitiv konstruktivist. Han mener at språk og tanker utvikler seg fra individet til samfunnet. Barnet utvikler selv sin forståelse og oppfatning av omgivelsene. Lev Vygotsky har et sosiokulturelt perspektiv hvor språk og kommunikasjon ses på som noe barn støter på og tar til seg i samspill med andre gjennom kollektive, menneskelige virksomheter. Piagets stadieteori har hatt stor betydning i opplæringssammenheng, men er kommet i vanry etter hvert (Säljö 2000). Kritikken går blant annet ut på at dette kan virke begrensende på de som underviser. ”*Slik leder Piaget pedagogens oppmerksomhet i retning ” hva barna har intelligens til å utføre”, noe som igjen får pedagogen til å holde igjen overfor barna.*” (Mellin-Olsen 1993, s.15). Piagets nedtoning av betydningen av menneskets sosiale og kulturelle bakgrunn, strider mot nyere læringssyn. At barns egne aktiviteter uten videre skal lede fram til å oppdage for eksempel abstrakte vitenskapelige kunnskaper er påpekt som urimelig av mange (Säljö 2000, Bencze 2004). I den tradisjonen som Piaget regnes til, så man på utvikling og læring som en reise mot samme enhetlige og universelle ”mål” som ferdig utviklet intellekt. Dette sees på som uavhengig av fysiske og kulturelle omgivelser (Säljö 2000). Ser man menneskets utvikling og læring i et sosiokulturelt perspektiv, vil det å snakke om et endepunkt, der ”toppen” er nådd, være meningsløst. Mennesker preges hele veien av andre og er virksomt hele livet og utvikler seg dermed hele livet.

I matematikkdidaktikk har diskursens rolle i opplæringen, betydningen av ”å snakke matematikk” blitt fremhevet i de senere år. Her er Vygotsky og det sosiokulturelle perspektiv sentralt. *”Der Piaget sier at barnet utvikler operasjonell intelligens fordi det kan snu en tankerekke, det kan tenke reversibelt, sier Vygotsky at barnet oppdager at det kan resonnere ved hjelp av språket.”* (Mellin-Olsen 1993, s. 21). Marit Johnsen Høines snakker om *språk av 1. og 2. orden* (Høines 1998). Språk av 1. orden er familiære begreper, mens språk av 2. orden ikke er det. For et førskolebarn kan for eksempel mengden tre være språk av 1.orden, mens tallsymbolet ”3” er språk av 2.orden. Lærerens oppgave blir å hjelpe eleven til å gi det som er 2.ordens språk et begrepsinnhold med utgangspunkt i det som er kjent for eleven. Begrepsinnhold og begrepsuttrykk utvikler seg på en dialektisk måte, de er gjensidig avhengig. Dette er etter min oppfatning i slekt med tanken om at diskursen rundt et matematisk begrep både gir et navn på begrepet og et innhold til begrepet (Sfard 2000). Sosialkonstruktivistiske begreper som kollektiv kunnskap og forsvarlig relativisme er også viktig i sammenheng med diskursens betydning etter mitt syn.

For matematikkdidaktikk har Piagets arbeider også vært viktige i studier av *misoppfatninger/utilstrekkelige begreper* og utvikling av såkalt *diagnostisk undervisning* (se kap 2.3.3). Dette igjen har påvirket oppgavetypene som gis i lærebøker og til prøver. Han arbeidet mye med tallrepresentasjon (*kardinasjon* og *ordinasjon*, se kap. 2.3.2) og begrepet *reversibilitet*. Han har satt det aktive, undersøkende og engasjerte barn i sentrum og har betydd mye for synet på undervisningsmetoder. Betydningen av barns egen aktivitet er et fellestrekk mellom Piaget og et sosiokulturelt syn på læring. Lærer som en veileder for barn er viktig i begge tradisjoner i tråd med at barnet danner kunnskaper gjennom aktiv handling. Samtidig oppfatter jeg en formidlende lærerrolle mer i tråd med et sosialkonstruktivistisk/ sosiokulturelt syn siden kunnskap også er et felleseie (Björkqvist 1993). Begge disse ”lærerrollene” er etter mitt syn viktige, en lærer må kunne veksle mellom disse.

Piagets teori om akkomodasjon og assimilasjon og Vygotskys teori om barnets proksimale sone har begge påvirket undervisningsmetoder slik at fokus rettes mot å ta utgangspunkt i det barnet kan/ kan greie.

2.2 Prosess og produkt

2.2.1 Begrepsutvikling

Anna Sfard er professor i matematikkdidaktikk ved Universitetet i Haifa, Israel. I artikkelen ”On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin” diskuterer Sfard (1991) utviklingen av *strukturell* *forståelse* og *operasjonell forståelse*. Hun hevder at abstrakte notasjoner som for eksempel tall eller funksjoner kan begripes på to helt ulike måter, operasjonelt som prosesser og strukturelt som objekter. Utviklingen hos den enkelte som lærer matematikk vil ofte være lik den historiske utviklingen av begreper som for eksempel tall eller funksjoner. Operasjonell forståelse av begrepet kommer før strukturell forståelse. Strukturell forståelse er en forståelse på et høyere "nivå", en mer fullstendig forståelse. Samtidig er de komplementære i den forstand at begge er nødvendig for en full beskrivelse av begrepet. Hun snakker altså om en dualitet heller enn en dikotomi.

Hun deler utviklingen av et matematisk begrep fra prosess til abstrakt objekt inn i tre nivåer, "degrees of structuralization". På engelsk kalt: *Interiorization - condensation – reification*. Jeg velger å bruke fornorskede versjoner: *Interiorisasjon, kondensasjon* og *reifikasjon*. Interiorisasjon er det nivået hvor eleven blir fortrolig med de prosesser som eventuelt gir opphav til et nytt begrep. Eksempler hun bruker er telling som leder til naturlige tall eller algebraiske manipulasjoner som leder til funksjoner. Kondensasjonsfasen er når evnen til å se en gitt prosess som en helhet er nådd, for eksempel undersøke funksjoner, tegne grafen, kombinere flere funksjoner. Først når man løsriver seg fra å knytte begrepet til en spesiell prosess, og ser på det som et ferdig utviklet objekt, snakker vi om reifikasjon. Reifikasjon (tingliggjøring) er et sprang i begrepsutviklingen, hvor man går fra en operasjonell forståelse til en strukturell. Lavere nivås reifikasjon vil være grunnlaget for neste nivås interiorisasjon. Samtidig forutsetter disse hverandre. Dette objektet kan det igjen opereres på. De andre nivåene er gradvise endringer, mens reifikasjon kan sees på som et momentant kvantesprang, en prosess overføres til å bli et objekt, en statisk struktur.

En følge for undervisning er at det å utføre prosesser må ses på som viktig for utvikling av forståelse, ikke bare som en følge av forståelsen. Dette igjen vil i følge Sfard (1991) bety en rehabilitering av synet på betydningen av tekniske ferdigheter etter at disse urettmessig ble degradert på en overdreven måte som reaksjon på behaviorismen. Hun viser til Piagets arbeider og siterer ham: *"the abstraction is drawn not from the object that is acted upon, but from the action itself. It seems to me that this is the basis of logical and mathematical abstraction"* (Sfard 1991, s.17).

Man kan kanskje si at en operasjonell forståelse av et begrep mange ganger er tilstrekkelig, Sfard (1991) nevner som eksempel at vitenskapen om regning som i dag kalles algebra hadde en distinkt operasjonell karakter i tusenvis av år. Samtidig opererte de på andre objekter, tall, og dette behovet for å utføre en prosess på et objekt med et annet objekt som resultat ligger i at vår evne til å forestille oss noe skapes av våre sanser.

At reifikasjon av en gitt prosess opptrer samtidig med interiorisasjon av en prosess på høyere nivå og at de forutsetter hverandre kan ses som en slags ond sirkel i læringssammenhenger (Sfard 1991). For det første vil det begynnende arbeidet med prosesser på høyere nivå sørge for at lavere nivås reifikasjon oppstår, samtidig som dette igjen er en nødvendighet for å gi mening til prosesser på høyere nivå. Å prøve å gå videre i matematikk uten lavere nivås reifikasjon vil uansett oppleves meningsløst. Samtidig betyr dette at en gitt rekkefølge i matematikkinnlæringen, prosess før objekt eller omvendt ikke uten videre kan fastslås. Slik jeg oppfatter det vil det være en gjensidighet her. Man kommer heller ikke unna det faktum at dette krever innsatsvilje. Det er ingen snarveier, heller ikke for profesjonelle matematikere. Sfard skriver:

> *"Becauce of the complex nature of their mutual dependence, it seems inevitable that in the process of learning, student's understanding – this feeling of competence and*

mastery which accompanies the ability of "seeing" abstract structures – will sometimes drop behind the technical profiency. This implies that in some cases the learner must put up with certain amount of "mechanical" drill accompanied by doubts about meaning and by a feeling of insufficient (instrumental only) understanding." (Sfard 1991, s. 32).

At matematikk virker meningsløs for mange kan ses i lys av denne teorien. De som dyttes videre i matematikk uten å ha gjennomgått den nødvendige utviklingen, vil raskt ramle av lasset og miste motivasjonen.

Det komplementære mellom operasjonell og strukturell forståelse av matematiske begreper er etter mitt syn en nyttig tilnærming til skolens matematikkopplæring og bør få følger for denne. Dette er også dimensjoner som anvendes i analyse og vurderinger videre i min oppgave. Ikke minst i sammenheng med spørsmål om balansen mellom forståelse og ferdigheter.

2.2.2 Matematisk tenkemåte

Nyere læreplaner preges av følgende hovedkarakteristikker og prinsipper: En matematisk disposisjon/tenkemåte som det endelige formål med matematikkundervisning, et konstruktivistisk og autentisk læringsmiljø som middel og nytenkning med henblikk på selve innholdet i matematikklæreplaner på elementært nivå (Verschaffel & de Corte 1996).

Nytenkning har blant annet ført til at arbeid med fakta, regler og prosedyrer er tonet ned. Dette oppfattes ikke lenger som et viktig mål for matematikkundervisning (Gravemeijer & van Galen 2003). Anvendt matematikk ses som sentralt, noe som har ført til en forskyvning mot flere oppgaver av typen tekstoppgaver/problemløsningsoppgaver.

Et syn på matematikk som en aktivitet vektlegges i tråd med et sosiokulturelt syn (Alseth mfl. 2003). Det ansees ikke lenger som like viktig at alle bruker samme løsningsmetode. Prosessen blir viktigere enn produktet. I denne sammenheng brukes prosessbegrepet om aktiviteter, valg av løsningsstrategier. Hovedsaken blir den matematiske tenkemåten som innebærer *"å utforske, lage hypoteser, begrunne, reflektere og kommunisere matematisk, og samtidig evnen til å bruke disse kognitive og metakognitive ferdigheter effektivt for å løse ikke- rutinemessige problemer."* (Verschaffel & de Corte 1996, s. 101, min oversettelse). De føyer også til: *"å utvikle en positiv holdning til matematikken, se på den som et kraftig verktøy for å studere situasjoner, og utvikle selvtillitt til egne matematiske ferdigheter."* Produktet, resultatet eller løsningsmetoden kommer i andre rekke.

Hvis man tenker seg at valg av løsningsmetode også kan ha betydning for utviklingen av ytterligere forståelse, vil det å jobbe ut fra at alle metoder er like gode kunne ødelegge den matematiske utviklingen slik jeg ser det. Et spørsmål er dessuten om det er mulig å få en oversikt over det kraftige verktøyet matematikk er uten samtidig å ha innblikk i at en metode som brukes i en kontekst, kan anvendes på samme måte i en annen. Er det nødvendigvis bare motsetninger mellom matematisk tenkemåte og matematiske regler og prosedyrer?

Det er etter mitt syn stor forskjell på å tone ned noe og det å ikke lenger se det som viktig. I perioder har matematikkundervisning vært for fokusert på ferdighetstrening og drill. Nå kan pendelen ha svingt for mye andre veien. At trening på ferdigheter ikke anses som nødvendig er blant annet i konflikt med oppfatningen om at arbeid med tekniske ferdigheter og forståelse har en gjensidig forsterkende effekt (Sfard 1991, se kap. 2.2.1). At mange opplever mestring i tilknytning til trening på ferdigheter kan i neste omgang styrke forståelsen for anvendelse av ferdighetene. I tillegg kan det øke motivasjonen og gleden ved faget. At strukturell forståelse på et nivå er forutsetning for operasjonell på et høyere nivå betyr at matematikk til en viss grad bygges opp trinnvis, du må kunne telle før du kan multiplisere. På den annen side er det mange elever som ønsker å forstå alt til bunns umiddelbart. Disse ender etter min erfaring ofte opp med å mislike matematikk. At forståelse av matematiske begreper ofte er en trinnvis prosess som krever mye arbeid, gjør at denne gruppen elever lett faller fra. Praktiske eksempler hentet fra deres virkelighet vil være spesielt viktig som motivasjonsfaktor for disse.

At eleven oppdager matematiske sammenhenger gjennom å gjøre erfaringer er i tråd med et konstruktivistisk læringssyn. Dette fører til eierforhold til kunnskapen, og gjør at den fester seg bedre. Læring kan fungere som ”*a process of guided reinvention*” hvor elevene rekapitulerer menneskehetens læringsprosesser, de konstruerer dem på nytt. (Keijzer mfl. 2004). Motforestillinger mot dette syn går i korthet ut på at begreper/oppdagelser det har tatt menneskeheten århundrer på å komme frem til, og da er det gjerne genier som står bak, ikke opplagt blir oppdaget eller gjenoppfunnet av alminnelige barn i skolen (se også kap. 2.1.4).

2.3 Tall og tallforståelse

2.3.1 Hva er tallforståelse?

Grunnlaget for all matematikk, er tall og telling. Å utvikle god tallforståelse hos elever er derfor helt essensielt. NCTM (National Council of Teachers of Mathematics i USA) Standards definerer tallfølelse som:

> "*en intuisjon om tall som involverer fem innbyrdes beslektede komponenter: ”tallbetydninger, tallsammenhenger, relative størrelsesforhold mellom tall, relativ effekt av operasjoner på tall og meningsfulle referenter for tall og mengder” ”.*
> (Verschaffel & de Corte 1996, s.109, min oversettelse).

A. McIntosh (2004) beskriver tallfølelse som:

> *” a person's general understanding of number and operations along with the ability and inclination to use this understanding in flexible ways to make mathematical judgements and to develop useful and efficient strategies for managing numerical situations. It results in a view of numbers as meaningful entities and the expectation that mathematical manipulations and outcomes should make sense.”* (McIntosh 2004)

Gravemeijer & van Galen (2003) beskriver tallforståelse som en forståelse for hvordan finne frem/orientere seg rundt i et matematisk miljø. Slike omgivelser kan sees på som utviklet fra et nettverk av tallrelasjoner.

Nyere matematikkplaner legger vekt på å bygge et sammenhengende reisverk av tallkunnskap heller enn å isolere fakta og regler for hver ny talltype. Ut fra min oppfatning er dette en fornuftig tilnærming.

2.3.2 Hele tall

Naturlige tall har også en operasjonell rot (Sfard 1991). Selv om barnet tidlig oppfatter én til en- korrespondansen mellom tallet det får når det teller en mengde og antall gjenstander i mengden, vil det allikevel lenge telle på nytt i stedet for å bruke det siste tallet i tellerekka til å svare på spørsmålet: ”Hvor mange gjenstander har vi?” Begrepet antall av noe knyttes altså lenge til tellingen mer enn til tallet de ender opp med.

Et eksempel på tallsammenhenger som Gravemeijer & van Galen (2003) trekker fram er at når elever gjennom arbeid med ulike aktiviteter og konkreter lærer at for eksempel 2 pluss 2 er 4, så lærer de etter hvert også at det bestandig er slik at når du legger sammen to av noe med to av det samme får du alltid fire av det uavhengig av konkretene de brukte i innlæringen. Elevene generaliserer ut fra de praktiske situasjonene. Tallene blir etter hvert matematiske objekter i seg selv, løsrevet fra tellbare, identifiserbare objekter (jfr. Sfard 1991, kap. 2.2.1).

Tall kan deles inn i ulike aspekter: Kvantifisering (Kardinalaspektet), plassering i en rekke (Ordinasjon), måling, beregning, navnsetting (Verschaffel & de Corte 1996). Piaget arbeidet mye med kardinasjons- og ordinasjonsasaspektet. Han mente at tallforståelse utvikles gjennom disse to prosessene (Høines 1998, s. 23).

Arbeid med plassverdibegrepet må vies mye oppmerksomhet. Det er ingen selvfølge for et barn at 32 er forskjellig fra 23. Historisk sett kom denne måten å gruppere på sent i menneskets historie og er komplisert å forstå (jfr. Sfard 1991, kap. 2.2.1). Additive tallsystemer er eldre og mer intuitive. Nullens rolle som plass-siffer for å angi at det ikke er noen enere, tiere og så videre er heller ikke selvsagt og er en relativt sett ”ny” oppfinnelse, i Europa siden 1400-tallet (Hovik 2003).

Måten vi bruker språket på for tosifrede tall kan være forvirrende. Ut fra et matematikksyn er den såkalte nye tellemåten (det begynner å bli en stund siden) hensiktsmessig. Det er lettere å snakke om tjuesju enn om syv og tyve når en arbeider med tierplasser og enerplasser.

2.3.3 Overgang til rasjonale tall, diagnostisk undervisning.

Innføring av rasjonale tall er for mange barn en alvorlig hindring for videre arbeid med matematikk. Misoppfatninger som har sin opprinnelse i erfaringer med hva som skjer med hele tall, at man overgeneraliserer, er vanlig. Diagnostiske oppgaver er et hjelpemiddel til å avsløre mangelfulle/utilstrekkelige begreper. Det kan gjøre det enklere for læreren å vite hva det bør jobbes mer med. En god diagnostisk oppgave er en oppgave som gir læreren mulighet til å finne ut hva det er eleven ikke forstår eller har mangelfulle kunnskaper om.

Å teste overgang fra hele tall til brøk og desimaltall kan innebære å teste forståelse for plassverdisystemet gjennom å spørre om hvilket tall som er størst av tall med ulik antall desimaler. Mange vil gjette på tallet med flest desimaler, fordi antall siffer har betydning for størrelsen av hele tall. Desimaltall kan dessuten oppfattes som to tall, et på hver side av komma. Oppfattes tallet slik, er det naturlig å tenke at et tall med tre desimaler bak komma er større enn et med to. I Norge leser vi også tallene på en misvisende måte. Vi sier to komma tjuefem. Det er lett å tro at det er større enn for eksempel to komma tre siden tjuefem er mye større enn tre. En annen forenkling mange elever drar med seg fra arbeid med hele tall, er at multiplikasjon forstørrer tallene og divisjon forminsker dem (Gravemeijer& van Galen 2003). At hvert heltall har ett eget navn (selv om de kan betegnes med flere), mens rasjonale tall angis med flere navn som f. eks 1/2 = 0,5 = 2/4 er egnet til å skape problemer (Christiansen 2004).

2.3.4 Brøk

Brøker kan begrepsmessig ses på både som forhold mellom to tall og som ett tall. Å se på divisjon av heltall som et selvstendig statisk objekt, er å se det som noe mer enn en prosess og krever en strukturell forståelse av brøk som tall (jfr. Sfard 1991, kap. 2.3.1).

I artikkelen ”Rational numbers: toward a Semantic Analysis – Emphasis on the Operator Construct” analyserer Behr mfl. (1993) rasjonale tall i lys av at disse tallene kan sees på som mengder av ”*subconstructs*”, delbegreper. Disse består av *del/hele, kvotient*, *forholdstall, operator* og *mengde* (Behr mfl.1993, Thompson & Saldanha 2003). De hevder at det har blitt argumentert for at en full forståelse for rasjonale tall innebærer både en forståelse av hvert delbegrep for seg og for en integrering av disse. De analyserer spesielt operatorbegrepet, altså brøk som multiplikator og alternative fortolkninger av teller og nevner her. De foreslår tre ulike fortolkninger av operatorbegrepet: ”*duplicator/partition-reducer, strecher/shrinker, multiplier/divider”*. Forfatterne konkluderer med at når man skal modellere denne type problemsituasjoner i undervisning, må oppmerksomhet rettes mot om situasjonen kan tolkes i form av en endring i mengdeenhetens størrelse eller dens antall. Hvis ingen av disse passer, trengs en del/hele-, kvotient- eller forholdstallfortolkning av det rasjonale tallet (Behr mfl. 1993).

Thompson & Saldanha (2003) har en annen tilnærming:

> *”So to focus on subconstructs or meaning of the mathematical system of rational numbers ultimately runs the risk of asking students to develop meanings for a big idea they do not have.”* (Thompson & Saldanha 2003, s. 100).

Deres tilnærming er å plassere brøktankegang helt og holdent innenfor en mulitplikativ tankegang som en mengde konseptuelle handlinger. De betoner konseptualiseringer av målinger, multiplikasjon, divisjon og brøker. De skiller dette fra selve aktivitetene måling, multiplikasjon og divisjon. Dette er ideer/bilder av hva man gjør gjennom å utføre aktivitetene. De sier at selve ideen om forhold ”*is at the heart of measurement*” (Thompson & Saldanha 2003, s. 100). Begrepet tall var historisk sett lenge knyttet til målingsprosesser (Sfard 1991). Forestillingen om at et objekt er målt betyr å forestille seg at en egenskap ved objektet er blitt delt opp og å forstå at denne segmenteringen er en sammenligning med en standard mengde av denne egenskapen. Det er et begrepsmessig gjennombrudd for elever når de innser at størrelsen/innholdet av en kvantitet ikke endrer seg selv om vi endrer måleenhet. Går du fra å måle i g til mg, endrer enheten seg med 1/10, men samtidig blir målet 10 ganger større, noe som betyr at selve størrelsen er den samme (Thompson & Saldanha 2003). Det er altså viktig å skille mellom en mengdes mål og dens størrelse. Det samme skille kan man sette på formler: *numeriske formler* og *kvantitative formler* (Wildi (1991) i følge Thompson & Saldanha (2003)). Å se formelen kvantitativt sier noe om hvordan størrelsen er konstruert, at for eksempel arbeid er definert som kraft multiplisert med distanse. Numerisk betyr at $W = f \cdot d$ gir en regneoppskrift i en spesiell måleenhet. Thompson & Saldanha (2003) trekker fram et eksempel hvor to elever skal regne ut volumet av et prisme hvor en sideflates areal og dybden på prismet er gitt. Den ene ser på formelen V = lbh som en numerisk formel hvor alle tre tall må være oppgitt for å finne volumet og greier ikke oppgaven. Den andre eleven har en kvantitativ forståelse for formelen og ser at man kan multiplisere arealet med dybden (Thompson & Saldanha 2003, se også Smith 2003, kap. 2.4.3)

Proporsjonalitet er viktig i elevers forståelse for målinger og dermed forståelse for multiplikative begrep. Et utgangspunkt flere forfattere nevner er manglende fokus på å utvikle rike multiplikative strukturer i grunnskolers læreplaner. De fleste elever ser ikke proporsjonaliteten i multiplikasjon. Det eksplisitte målet i undervisning og læreplaner har vært å få dem til å se på multiplikasjon som gjentatt addisjon, på tross for at mye forskningslitteratur har dokumentert at dette gir et begrenset begrep om multiplikative strukturer. En tilnærming er å få elevene til å tenke på mengder og tall i sammenhenger hvor de behøver å forestille seg et mangfold av identiske objekter. Spørsmålet som så stilles er: "Hvor mange/mye utgjør disse?" (Thompson & Saldanha 2003). Hvis hovedbetydningen av $5 \cdot 4$ er "fem firere" i stedet for "legg sammen 4 fem ganger", vil fokuset flyttes fra en ren utregningsoppskrift (a la numerisk oppfatning av formel) til noe man må forestille seg (jfr. Sfard 1991, kap. 2.2.1). Det blir lettere å gi mening til for eksempel $5\frac{2}{3} \cdot 4$. Dette vil også kunne hjelpe elever til å forstå at 5x står for et tall som er fem ganger så stort som x og ikke for en ren regnekommando. Forståelse for denne typen sammenhenger er sentrale i arbeid med algebra.

Å forstå brøk som noe som medfører en proporsjonalitet henger sammen med en multiplikativ forståelse av multiplikasjon. Generelt å se produktet (nm) som at (nm) er n ganger så stort som m, (nm) er m ganger så stort som n, m er 1/n så stor som (nm) og n er 1/m så stor som (nm).

Thompson & Saldanha (2003) sier at å forstå brøk er *"on conceiving two quantities as being in a reciprocal relationship of relative size"* (Thompson & Saldanha 2003, s.107), eller at det er snakk om to sammenlignbare mengder som er målt i hverandres enhet. (Mengde A er 1/n av mengde B betyr at mengde B er n ganger så stor som A. Hvis A er n ganger så stor som B, er B 1/n så stor som A). De imøtegår en tilnærming som karakteriserer m/n av B som m "en n – er" av B med det argumentet at 1/n av B da kan oppfattes som en samling smådeler, uten grunnlag i et bilde av relative størrelser. Jeg oppfatter m "en n – er" som et forsøk på å tillempe begrepet til gjentatt addisjon. Samtidig stadfester de at deres tilnærming til brøkforståelse er avhengig av forståelse av sammenhenger mellom måling, multiplikasjon og divisjon. I likhet med Dörfler (2004, se nedenfor) er de opptatt av elevenes problemer med å løse forholdsoppgaver. De sier at:

> *"Brøker blir "virkelige" når mennesker forstår dem gjennom komplementære skjema av konseptuelle operasjoner som er grunnet i en dyp forståelse for proporsjonalitet. På samme måte vil fokuset på å utvikle disse skjema, øke studentenes forståelse for proporsjonalitet."* (Thompson & Saldanha 2003, s. 109, min oversettelse).

Denne gjensidigheten samsvarer etter min oppfatning med Sfard (1991, se kap. 2.2.1). Mange vil mene at dette er for komplisert i skolen. At å tenke gjentatt addisjon er mye lettere enn proporsjonalitet. Men i følge forfatterne vil multiplikasjon da være begrepsmessig helt atskilt fra målinger, proporsjonalitet og brøk.

I sin artikkel "Objectifying Relations: Fractions as Symbols for Actions" argumenterer W. Dörfler (2004) også for å arbeide med *en* tilnærming til brøk. Han taler for å vektlegge at essensen i brøk-begrepet er at brøker er en benevnelse på relasjoner mellom "*instances of* *magnitudes*" og at de konstitueres ved spesifikke (målings-) aktiviteter rettet mot disse. Altså igjen brøker som angivelse for forhold mellom to størrelser.

Utgangspunktet til Dörfler (2004) er at mange får problemer med brøkbegrepet gjennom tradisjonell innføring ved at det skjer en for rask og ureflektert objektivisering. Innføring av brøker går ofte ut på å jobbe med å fordele ting, dividere, se på brøk som en del av et hele, for eksempel pizzastykker eller sjokoladeplater. Brøker blir sett på som betegnelser på produkter av disse handlingene eller innført som punkter på tallinja. Dette gir i følge Dörfler (2004) opphav til misoppfatninger og utilstrekkelige begreper. Hvis elever for eksempel alltid ser på a/b som notasjon for at a er en "del av et hele" som er b, vil de få problemer allerede ved møte med brøker der a > b (Thompson & Saldanha, 2003). At brøkbegrepet objektiviseres for raskt kan slik jeg oppfatter det bety at man ikke greier å handle fullt ut på dette objektet (sammenhengen mellom reifikasjon og neste nivås interiorisasjon, jfr. Sfard 1991, kap. 2.2.1).

Dörfler (2004) foreslår å arbeide med lengde og tar utgangspunkt i to like lange linjestykker som er delt inn på ulike måter. I studiet av relasjoner mellom disse, for eksempel at 7a = 5b = c, oppstår behovet for å uttrykke sammenhenger på formen (m/n).

> "*And, I think, those relations are more readily accessible than the corrsponding ones in the context of partitioning some unity*". (Dörfler 2004, s. 301).
>
> "*Hopefully, one third or 1/3 will then evoke the respective basic action symbolized by 3a = 1b if a = (1/3)b. In this way, 1/3 will not just be a certain part of a whole but it will point to the fundamental relationship of that part to the respective whole. The dependence of this relationship on both a and b, part and whole, becomes salient*" (Dörfler 2004, s. 310).

2.3.5 Desimaltall

Selv om barn er vant til å møte desimaltall i mange sammenhenger, betyr ikke det at de har direkte nytte av dette under utvikling av et godt integrert tallbegrep hvor alle tall er med. Det er et greit utgangspunkt, men arbeid med forståelse for posisjonssystemet er krevende. Selv om man vet at 50 øre er halvparten av en krone er det ikke gitt at man forstår at 0,500 eller 0,5 er samme tall. At elevene til en viss grad er familiære med disse tallene fra sin hverdag, gjør at de kan arbeide med dem i enkle sammenhenger, men ofte ikke utvikler en skikkelig forståelse av desimalbegrepet i følge Keizer mfl. (2004). De foreslår å anvende en gjenoppfinnelsesesstrategi (*reinvention*) ved arbeidet med innføring av desimaltall. At elevene selv "oppdager" behovet for desimaltall gjennom eksperimentering og erfaring og bygger på sine kunnskaper om brøker og heltall. At man setter søkelyset på tideler, hundredeler og så videre og stadig bruker disse ordene i matematikktimene vil forhåpentligvis lette forståelsen for at for eksempel $0{,}45 = \frac{45}{100}$. Dette arbeides det nok mindre med i skolen enn det motsatte. Sammenhengen mellom brøk og divisjon påpekes hele veien gjennom omtale av brøkstreken som delingstegn, og selve brøken som kvotient.

Noen argumenterer for at bruk av tallinjer kan utvikle god tallforståelse og forståelse for regneoperasjoner (se også "den tomme tallinje", Gravemeijer & van Galen 2003, kap. 2.3.6). U. Christiansen (2004) foreslår nettopp å bruke tallinjer i arbeidet med å utvikle hva han kaller et velintegrert tallbegrep som gjør at du kan "*easily change between square roots, fractions, desimal notations etc. and your understanding of some parts of the numbers* *strengthens your general number concept."* (Christiansen 2004). Han foreslår at man i skolen jobber med å se på tall både som et punkt på tallinjen og som en forflytning langs denne. Tallinjer tilfredsstiller generelt:

- *En til en forbindelse mellom punktene på tallinjen og de reelle tall*
- *At det er en naturlig geometrisk ordning på punktene på tallinjen*
- *At den introduseres tidlig i skolen i sammenheng med telling og måling, og kan bli sett på som en generalisering av en skala.*
- *Standard aritmetikk kan defineres og reglene kan forklares fornuftig.* (Christiansen 2004, min oversettelse)

Sfard (1991) hevder at en representasjonsform som tallinje kan være viktig som en siste trigger for reifikasjon av begrepet negative tall. I norske lærebøker fra før M 87, ser vi en hyppig bruk av tallinjer og såkalte tallpiler som regneverktøy i forbindelse med regning med negative tall (Hovik 2003). Negative tall, spesielt regning med disse er nå tonet ned i grunnskolen. Historisk sett kom negative tall som egne matematiske objekt inn så sent som på 1800 – tallet (Hovik 2003). Tidligere ble de ansett som beregningsverktøy, eller positive tall med negative fortegn. Også her ble det operasjonelle begrepet utviklet lenge før det strukturelle (jfr. Sfard 1991, se kap. 2.2.1).

2.3.6 Mer om aritmetiske operasjoner

Nyere matematikkdidaktikk har som før nevnt dempet fokus på tradisjonelle algoritmer og økt vektleggingen av hoderegning og estimering/overslagsregning (Verschaffel & de Corte 1996). Nå vektlegges i større grad valg av passende strategier og refleksjon rundt prosess og resultat. Grunnen til dette er tilgjengeligheten til og priser på kalkulatorer og datamaskiner som kan utføre beregningene.

Diskusjonen rundt hva mental aritmetikk er kan tradisjonelt uttrykkes slik: "å gjøre i hodet det du gjør på papir." En annen, mer hensiktsmessig forståelse av det er "tenke med hodet" heller enn å "tenke i hodet" (Verschaffel & de Corte 1996). I følge dette synet er ikke hoderegning bare en praktisk måte å løse stadardutregninger på, men også velegnet til å utvikle tallforståelse, høyverdig matematisk tenkning og problemløsning.

Samtidig er det fortsatt enighet om at elevene skal lære våre tradisjonelle algoritmer. Et konstruktivistisk læringssyn tilsier at det er ønskelig at de forsker seg fram til dem selv ut fra gode og brede tallkunnskaper, blant annet med forståelse for plassverdisystemet (Verschaffel & de Corte 1996). Barn danner sine egne oppfatninger og misoppfatninger i arbeidet med regneartene og algoritmer. De kan mye matematikk og greier å løse mange ulike problemer i sin egen hverdag som de ikke får til like lett i matematikktimene. Gravemeijer & van Galen (2003) beskriver i artikkelen: "Facts and Algoritms as Products of Students' Own Mathematical Activity" innlæringen av fakta og algoritmer som en prosess som må bygge på tallforståelse. Elevene bør få utvikle og gjenoppdage algoritmene selv gjennom å arbeide med utvalgte kontekstuelle problemer. Marit Johnsen Høines legger i sin bok "Begynneropplæringen" opp til å ta utgangspunkt i den enkelte elevs måte å løse et problem/ regnestykke på og (hvis nødvendig) veilede eleven videre mot en mer effektiv og god metode (Høines 1998).

Alle elever behøver ikke å ende opp med samme multiplikasjonsalgoritme, så lenge den virker på alle gangestykker og ikke er for tungvint å bruke. Argumenter for en felles algoritme ligger slik jeg ser det mer på kommunikasjonsplanet. I et læringsfellesskap hvor barna viser for hverandre og læreren skal strukturere for en større gruppe, kan det lett bli vel mye fokus på hvorfor den og den gjør det sånn eller slik. Elever med matematikkvansker vil muligens ende opp som mest forvirret. Standardalgoritmene er også raske og hensiktsmessige. Det er ikke sannsynlig at alle barn selv finner gode algoritmer.

Til tross for enighet om innlæring av algoritmer for de fire regnearter, argumenterer noen matematikklærere og forskere mot all bruk av disse algoritmene (Gravemeijer & van Galen 2003). Hoderegning kombinert med kalkulator er i dag et bedre alternativ, vil det hevdes. Gravemeijer & van Galen (2003) argumenterer selv for en matematikkundervisning som gir elevene en mulighet til å lære algoritmer på en eller annen form. De tar avstand fra å utelate undervisning i regler og prosedyrer. Fakta og prosedyrer a la algoritmer kan ses på som en forlengelse/utvidelse av tallforståelse hvis man ser på kunnskapsdannelse som en form for aktivitet i stedet for som en overførbar vare (Gravemeijer & van Galen 2003). Å se på matematikk som aktivitet (se kap. 2.2.2) impliserer ikke at matematikk som et sett med regler, prosedyrer og kunnskap skal utelates slik noen undervisere synes å mene, de kan gjenoppfinnes. "*Guided Reinvention*" (Freudenthal) gjør i følge forfatterne modellering til en fundamental prosess i matematikkopplæring. Man kan modellerere en aktivitet, ikke et objekt. Å matematisere et problem kan gjøres både vertikalt og horisontalt, forfatterne viser til Treffers (1987). Horisontalt betyr å gå fra en kontekst til et matematisk problem som så løses matematisk, for eksempel bruke en ligning på et praktisk problem. Vertikalt betyr for elevene å matematisere en matematisk aktivitet, at de løfter selve matematikken opp til et høyere nivå og er "*at the heart of mathematical progress*" (Gravemeijer & van Galen 2003, s. 117). Til sammen konstitueres en prosess kalt "*progressiv matematisering*".

I arbeidet med utvikling av algoritmer for addisjon og subtraksjon, argumenterer Gravemeijer & van Galen (2003) for bruk av "*Den tomme tallinjen*". Denne brukes av elevene til å skrive tallrelasjoner de har bruk for i en gitt situasjon og som bygger på elevenes kunnskaper om tallrelasjoner. Arbeidet med tallinjer kan starte svært konkret med for eksempel perlekjeder med 100 perler i ulike farger på tiergruppene. Faren ligger i at elevene ser disse perlekjedene som en egen verden med egne regler som ikke har med andre ting å gjøre. En annen fare med for sterk prosedyrefokus kan være at de blir anvendt blindt, selv om prosedyrene i seg selv er utviklet gjennom refleksjon og erfaring (Gravemeijer & van Galen 2003).

Arbeidet med å lære standardalgoritmer fører i følge noen forskere ikke til utvikling av tallforståelse (McIntosh 2004). Elevene kan dermed komme lenger hvis de slipper å konsentrere seg om denne jobben. McIntosh (2004) argumenterer for utvikling av uformell skriftlig regning som er fundert i undervisningsmetoder i hoderegningsstrategier, og at man utsetter opplæring i standardalgoritmer. Disse uformelle skriftlige metodene vil fungere som en bro mellom hoderegning og formelle skriftlige metoder (McIntosh 2004). En slik tilnærming til å lære formelle strategier kan etter mitt syn være god.

Gardiner (2004) ramser opp et sett med villfarelser som han mener har hatt innflytelse i matematikkopplæringen i England og blant dem de innflytelsesrikes påstand om at det er "*unaturlig å la være å oppmuntre til bruk av kalkulatorer*" (Gardiner 2004, min oversettelse). Selv om innføring av standardalgoritmer ikke fører til økt tallforståelse kan det å erstatte dem med kalkulator gjøre vondt verre. Det som da går tapt er for eksempel treningen i å se størrelsesforhold mellom tall som man tross alt må når man regner med penn og papir. For eksempel må man da stille seg spørsmål av typen ”Hvor mange 12-ere får jeg plass til i 75?” Man vedlikeholder også hjelpemidler til hoderegning ved bruk av addisjons- og multiplikasjonstabellkunnskap. Dette mistes ved kalkulatorinntasting. Det kan i neste omgang gå utover utviklingen av en god forståelse for talloperasjoner. Kalkulator erstatter ikke bare standardalgoritmene for de fire regningsarter, de erstatter også regning med brøk og desimaltall, senere manipuleringer med bokstavuttrykk, graftegning og så videre. Dette kan medføre at man prøver å omgå mye av tiden som brukes til å oppnå en operasjonell forståelse for begrepene (jfr. Sfard 1991, kap. 2.2.1).

2.3.7 Problemsituasjoner, tekstoppgaver

Tekstoppgaver/problemstillinger bør brukes intensivt i begynnelsen av innlæringen for å gi regneoperasjoner mening og å hjelpe til å utvikle formelle matematiske begreper og ferdigheter ut fra informasjonsmateriale og verbale løsningsstrategier (Verschaffel & de Corte 1996, Fuson 2003). Forskning på dette indikerer at å starte med tekstoppgaver øker problemløsningskompetansen og gir like god eller bedre regnekompetanse. Når man gir elevene tekstoppgaver eller ber dem lage regnefortellinger oppdager man at mange gjetter på hvilken regneoperasjon de trenger. Er for eksempel tallene store, skal vi addere, er det et lite og et stort må vi dele. Elever har tradisjonelt startet med å lære å regne og så anvendt det de har lært på tekstoppgaver. I følge Fusons (2003) artikkel ”Developing Mathematical Power in Whole Number Operations*”* har mange lærebøker vært lagt opp slik at tekstoppgaven kommer på slutten av kapitlet. Dermed utfører elevene den regneoperasjonen de har arbeidet med i kapitlet på tekstoppgaven uten å lese den skikkelig. De svakeste elevene kommer kanskje ikke engang så langt som til disse oppgavene.

> *”The emphasis on teaching students to focus on key words in problems rather than to build a complete mental model of the problem situation, leads to poor problem solving because students never learn to read and model the problems themselves.”* (Fuson 2003, s. 68).

I følge forfatteren vil det å vente med problemsituasjonene til etter at de har lært den matematiske operasjonen føre til at eleven ikke ser sammenhengene mellom regneoperasjonen og aspekter ved problemsituasjonen. Lærebøker har også en tendens til å velge oppsett for elevene i stedet for å la dem tenke selv. Lærebøker pusher for eksempel elevene til å skrive 14 – 8, mens elevenes egen måte å representere situasjonen på kan være $8 + A = 14$ (Fuson 2003).

Tilknytning til realistiske situasjoner og øving på ulike tilnærminger er etter mitt syn viktig. Tre hovedkategoriseringer av problemsituasjoner for addisjon og subtraksjon som er mye brukt i nyere litteratur er ”*CCC: Change, Combine, Compare*” (Verschaffel & de Corte1996, Fuson 2003, Alseth 1998). På norsk: forandre/bytte, kombinere, sammenlikne. Det kan formuleres tekstoppgaver på ulike måter og i ulike vanskelighetsgrader innen disse tre kategoriene (for mer se Verschaffel & de Corte 1996). Lærebøker har en tendens til å inneholde bare de enkleste variantene av hver problemsituasjon (Fuson 2003). Tilsvarende klassifikasjoner av problemsituasjoner er utviklet til bruk for multiplikasjon og divisjon. To typer divisjon: *måling* og *deling*. I målingsdivisjon deles det på multiplikanden, mens det i delingsdivisjon deles på multiplikatoren (den faktoren som opererer på den andre). En annen måte å si det på er at i målingsdivisjon er man ute etter antallet av divisor. De fleste eksemplene på divisjon som elever møter i starten er delingsdivisjon. Når de skal begynne å dele på rasjonale tall, vil dette virke meningsløst, hvem snakker om halve personer. Da er eksempler med målingsdivisjon hensiktsmessig. Det er viktig å arbeide med begge former allerede fra starten. Samtidig er det også nødvendig å arbeide med å se at de to formene for problemsituasjoner løses med samme numeriske operasjon. Når elevene forstår den numeriske ekvivalensen mellom måling og deling vil de forstå at enhver måling av en mengde medfører en deling av den og at enhver deling av en mengde medfører en måling av den (Thompson & Saldanha 2003).

Multiplikasjon og divisjonssituasjoner kan klassifiseres i *kommutative* og *ikke-kommutative* situasjoner. Faktorene i en ikke-kommutativ situasjon vil representere ulike ”roller”. Vi kan si at multiplikatoren opererer på multiplikanden for å danne produktet. Derav følger deling på multiplikand (måling) og deling på multiplikator (deling). I kommutative situasjoner er det umulig å skille mellom multiplikand og multiplikator og dermed mellom målings- og delingsdivisjon (for mer se Verschaffel & de Corte 1996).

Hvis elevers oppfatning av multiplikasjon kun er at det er gjentatt addisjon vil det kunne gi opphav til misoppfatninger når det gjelder de kommutative problemstrukturene spesielt. Konseptualisert multiplikasjon er som nevnt ikke det samme som gjentatt addisjon. Også i diskusjonen rundt forståelse for multiplikative strukturer som grunnlag for rasjonale tall er dette viktig (Thompson & Saldhana 2003).

Å starte med problemsituasjoner medfører et brudd med den måten de fire regningsarter tradisjonelt har vært undervist i skolen. Sfard (1991) siterer Kilpatrick (1988):

> ”*Why is that so many intelligent, well-trained, well-intentioned teachers put such a premium on developing students’ skill in the routines of arithmetic and algebra despite decades of advice to the contrary from so-called experts? What is it that teachers know that others do not?”* (Sfard 1991, s.10).

Lærere er ikke nødvendigvis bare bakstreverske. Det å øve på tekniske ting har også verdi. For det første vil automatisering være besparende tidsmessig og tankemessig. Dessuten kan for mange tekstoppgaver i forhold til rene regneoppgaver fungere som en slags unødvendig ”støy” i forhold til ferdigheten elevene skal lære (Gardiner 2004). Etter mitt syn ligger det en slags gjensidig forsterkende effekt i å veksle mellom rene regneoppgaver og tekstoppgaver. Det er mulig å tenke seg at forståelsen for når en regneoperasjon skal brukes ikke er helt uavhengig av øving i selve regneoperasjonen.

2.4 Algebra

Algebra har en lang historie. Den fulle utviklingen strakk seg over minst 1000 år og var en kompleks, subtil og ikke-intuitiv prosess (Wheeler 1996). Algebra kan historisk ha bygd på et geometrisk fundament, men det vanlige er å relatere algebra til aritmetikken. Algebra kan sees på som en utvidelse av eller fullføring av aritmetikken (Wheeler 1996). Dette blir også brukt som utgangspunkt for begynnerundervisningen i algebra.

I følge Brekke mfl. (2000) kan algebraens utvikling sees på som veien fra *retorisk algebra,* via *synkopert algebra* til *symbolsk algebra*. Gjennom tusener av år har algebraen beholdt en distinkt, operasjonell karakter (Sfard 1991). Retorisk algebra kjennetegnes ved at man ikke bruker symboler eller tegn til å representere ukjente størrelser, men vanlig språk. Den retoriske algebra handlet om prosesser som sådanne, de eneste abstrakte objekter som ble brukt, var tall (Sfard 1991). Et eksempel er: ”*Produktet av to tall er uavhengig av rekkefølgen en betrakter dem i* ” (Brekke mfl. 2000, s. 6). Dette utsagnet kan kalles algebraisk fordi det generaliserer en aritmetisk prosess (Smith 2003).

Behovet for å lage forkortinger av slike lovmessigheter er nærliggende for oss i dag. I følge Brekke mfl. (2000) har dette sitt utspring i Diofantos (250 e Kr), som introduserte forkortelser for ukjente størrelser. På slutten av 1500-tallet startet utviklingen av symbolsk algebra. Viete (1540-1603) anvendte bokstaver for gitte, ukjente størrelser. Algebra ble et mulig verktøy for å bevise matematiske sammenhenger. Denne lange utviklingen av algebra fram mot dagens strukturelle tankegang, er altså analog med tanken om operasjonell før strukturell begrepsforståelse (jfr. Sfard 1991, kap. 2.2.1).

2.4.1 MSS

For å bevege seg mellom konkrete og abstrakte systemer, brukes matematiske tegnsystemer eller *MSS* som er en forkortelse for ”*Mathematical Sign Systems*”. Med MSS menes de *representasjonsformer* som anvendes til å uttrykke og kommunisere matematiske begreper. For eksempel grafer, algebraregler, diagrammer og lignende. Mange bruker bare begrepet representasjonsformer om MSS. Når man arbeider med matematikk, vil man noen ganger operere innen samme tegnsystem, for eksempel å snu på en formel (Filloy & Sutherland 1996). Andre ganger beveger man seg mellom ulike tegnsystemer, for eksempel funksjonsuttrykk og graf eller mellom et eller flere tegnsystemer og ikkematematisk språk. MSS har fått for lite oppmerksomhet fra læreplanutviklere sammenliknet med inndelingen i matematiske begreper (Filloy & Sutherland 1996). Matematikere som mener at matematikken er oppdaget heller enn oppfunnet (se kap. 2.1.2), vil hevde at et bytte av tegnsystemer ikke endrer selve begrepet, at forståelse er atskilt fra og kommer før representasjonen. Andre som har en konstruktivistisk og/eller sosiokulturell tilnærming vil mene at begrepene dannes av studentene selv og at tegnsystemer starter som en måte å kommunisere på og utvikler seg til et tankeredskap (se kap. 2.1.2). ”*They will be inevvitably using sign systems without fully understanding what they are doing, as is the case when a baby learns to talk*” (Filloy & Sutherland 1996, s. 143). Symboler, navn, grafer og andre representasjonsformer har en potensiell rolle i forbindelse med kondensasjon og reifikasjon (Sfard, 1991). Denne gjensidigheten, hvordan det ene styrker det andre er sentralt i den stadig skarpere fokus på ”å snakke matematikk”, noe jeg har tro på. Vygotsky mener at kunnskapen om et emne er relatert til språket man bruker når man danner og kommuniserer dette emnet (Smith, 2003). Subjektiv og objektiv matematikkunnskap gjenskaper hverandre og matematiske objekter i en syklus (Ernest 1998, se kap. 2.1.3)

For mange har ordet algebra vært synonymt kun med bruk av symbolsystemer. Algebraisk tenkning i videre forstand, har vært fraværende i algebraopplæringen (Smith 2003). Elevene bør se på algebra som et ”aid for thinking” heller enn en ”bag of tricks” (Thorpe, 1989).

2.4.2 Ulike opplæringssyn på algebra.

Det er to didaktiske ytterpunkter i tilnærmingen til algebraundervisning (Filloy & Sutherland 1996). Det ene er å ta utgangspunkt i konkrete, familiære situasjoner og konstruere en algebraisk syntaks med basis i en slik modell. Det motsatte er å starte med syntaksen, lære reglene og deretter anvende dem på problemer og ligninger. Å ta utgangspunkt i at algebra er en fortsettelse og en generalisering av aritmetikk vil lede til den første modellen. Sterkere vektlegging av algebraens struktur (som for eksempel fulgte av den såkalte moderne matematikken som hadde sin periode på slutten av 60-tallet) samsvarer med den andre modellen. Forkortet kan man si at det handler om hvorvidt man skal starte med en *semantisk tilnærming* eller med en *syntaktisk tilnærming*. Læreplanene ligger i praksis et eller annet sted mellom disse. L 97 heller mer mot den første tilnærmingen enn M 87.

Men selv om det er teoretiske grunner til å tro at en semantisk tilnærming til algebralæring lettere leder til god algebraisk prestasjon enn en ren syntaktisk, betyr ikke dette at konstruksjonen av en algebraisk syntaks umiddelbart og lett avledes fra en slik tilnærming (se kap. 2.2.2). Her ligger en stor utfordring. Veien fra problemsituasjoner og behov for generalisering til manipulering av de generelle uttrykkene er ikke gitt av seg selv. Det er slik jeg ser det viktig å innse at man ikke kommer unna at det trengs å arbeides med rene syntaksferdigheter. Ellers kan oppgaveløsning i neste omgang stoppe opp ved at elevene ikke greier å multiplisere sammen to parenteser eller at de blir sittende med store kompliserte uttrykk som de ikke klarer å forenkle (Filloy & Sutherland 1996). I begeistring over mulighetene som kalkulatorer og datamaskiner gir, ikke minst når det gjelder å ta over oppgaver som å regne for hånd og manipulere med bokstavuttrykk, mener mange at algebraopplæringen kan konsentrere seg mer om begrepsforståelse og problemløsningsaktiviteter. Thorpe (1989) gir til kjenne et slikt syn. Her mener jeg at ordet ”mer” er viktig. Hvis syntaksforståelse henger sammen med begrepsforståelse kan ikke trening på dette fjernes. Sfards komplementære tilnærming passer inn også i denne sammenheng.

2.4.3 De fire perspektiver

Forskjellige tilnærminger til begynneropplæring i algebra kan være: *Generaliseringsperspektivet, problemløsningsperspektivet*, *modelleringsperspektivet*. Wheeler (1996), Chazan & Yerushalmy (2003), Smith (2003) og Thorpe (1989) opererer med et fjerde, *funksjonsperspektivet*. De ulike perspektivene gir også mer eller mindre gode og overbevisende viktige begrunnelser for algebraopplæring i skolen.

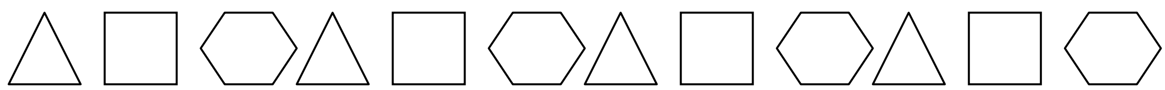
Algebra som generalisert aritmetikk er den tilnærmingsformen som oftest brukes i skolen. Dette gjelder formulering av ulike regneregler/lover som for eksempel kommutativ lov, distributiv lov, kvadratsetninger og så videre. I de senere år er det blitt vanligere å arbeide med å utforske tallfølger med et bestemt mønster, gjerne et det er mulig å illustrere med prikker, figurer eller gjenstander, for eksempel fyrstikker. Nytten av bokstavregning skal da forhåpentligvis oppdages etter hvert som behovet for å finne et uttrykk for et generelt ledd i følgen melder seg. Tankegangen er også at dette skal fremme undring og utforskingstrang, honnørord i L 97. TIMSS 2003 har mange slike oppgaver i motsetning til TIMSS 1995, så dette er en internasjonal trend.

Det er viktig at barneskolelærere som arbeider med tallmønstre har gode kunnskaper om hvordan dette kan knyttes til videre matematikk og sammenhenger mellom mønstre, algebra og funksjoner for sine elever (Smith 2003). Skillet mellom aritmetikk og algebra er kunstig og det er mulig også innenfor aritmetikken å ha en algebraisk tilnærming. Tradisjonell aritmetikk har konsentrert seg om utregninger av svar, noe som gjør at elever har problemer med å la aritmetiske uttrykk stå i ikke-utregnet form. Stephens (2004) refererer til Collins(1975) som identifiserte *ALC* (*Acceptance of Lack of Closure*) som en nøkkel til å tenke algebraisk. Algebraisk tenkning kjennetegnes som relasjonell eller strukturell (Sfard 1991), mens aritmetikk tradisjonelt har handlet om prosedyrer og framgangsmåter for å finne et svar (Stephens 2004). Utviklingen av algebra fra en operasjonell prosedyrekarakter til en strukturell karakter er interessant i denne sammenheng. Hvis det er slik: ”*It seems that the scheme which was constructed on the basis of historical examples can be used also to describe learning processes*” (Sfard 1991 s. 16), så er det viktig å være bevisst koblingen mellom aritmetikk og algebra. Her tror jeg muligens lærerutdanningen har en stykke veg å gå.

I sin artikkel ”The Importance of Generalisable Numerical Expressions” argumenterer Stephens (2004) for å se algebra i tallregning ved å arbeide med generaliserbare numeriske uttrykk. Et eksempel er det han kaller ”*Peters metode*” hvor elever i småskolen får presentert en måte å trekke fra tall mellom 1 og 9 på: Eksempel 32 – 5 = 32 + 5 – 10. Elever prøver ut metoden, diskuterer og gir sin forklaring på den. Mange elever kommer da med utsagn som er algebraiske i den forstand at de er løsrevet fra fokus på å trekke sammen tallene og ser systemet uavhengig av hvilke tall som brukes. Det er viktig å notere seg at de elevene som greide dette, på forhånd var i stand til å trekke fra og legge til tall mellom 1 og 9. Dette understreker viktigheten av tallforståelse og regneferdigheter som et grunnlag for denne typen tenkning. Stephens (2004) kommer med fire forslag til arbeidsområder i skolen for å skifte fra en tradisjonell aritmetikktilnærming til algebraisk tenkning:

- *Fokus på likhetstegnet som ekvivalenstegn*
- *Beskrive og gjøre bruk av relasjonelle egenskaper ved aritmetikk*
- *Generalisere løsninger på aritmetikkproblemer som støtter elevenes utvikling av variabelbegrepet på en uformell måte*
- *Gi elevene anledning til å diskutere løsningsstrategier på en måte som belyser fundamentale matematiske prosesser og ideer.*(Stephens 2004, s.105, min oversettelse)

Temaet “*Stasis and change*” kan være nyttig for å samle emnene mønstre, algebra og funksjoner både pedagogisk og begrepsmessig (Smith 2003). Et statisk blikk preger i følge Smith (2003) mye av skolematematikken. Han skriver at ”*Mathematics of Change*” er et manglende element. Det er dette element som oppmuntrer elever til å utforske mønstre knyttet til hvordan de utvikler seg. En måte å se matematikkopplæring på er at det er å oppnå evnen til å konstruere mønstre som er kompatible med, eller kan bli kommunisert til andre. Det interessante og utfordrende er i følge Smith (2003) at det i enhver situasjon kan konstrueres mange ulike mønstre. Han bruker et eksempel med 12 figurer (Smith 2003, s. 137):



Figur 2.4.1: Eksempel på mønster

Dette kan oppfattes av mange som et mønster som endrer seg som tre og tre figurer, mens andre vil se fire og fire figurer med lik figur i hver ”ende”. Hvis man ser etter hvordan dette mønstret utvikler seg, har man et endringsfokus, mens det å se mønstret som det det er; tolv figurer som alternerer, er et statisk fokus. Sammenhengen mellom disse to som er en fundamental tilnærming til mønstre, funksjoner og algebra, behandles alt for tilfeldig i læreplanene (Smith 2003). Å skape et slikt mønster, leder til konstruksjonen av en enhet

Forholdet mellom antallet repetisjoner av enheten og totaltallet av figurer vil etter hvert være naturlig å utforske. Dette igjen kan knytte sammen mønstre og funksjoner. Å arbeide med ulike tallmønstre uten å knytte det til figurer vil etter mitt syn også være nyttig, særlig i forhold til videre arbeid med algebra og funksjoner.

Enhver ligning med to variable, kan også skrives som en ekvivalent ligning som angir en lineær funksjon med en variabel (Chazan & Yerushalmy 2003). Likhetstegnet kan her brukes til å finne felles funksjonsverdier for to ulike funksjoner ved å skrive ligningen f(x) = g(x). I følge Chazan & Yerushalmy (2003) vil en funksjonstilnærming til skolealgebra understreke følgende fortolkninger:

- *Bokstaver som variable heller enn ukjente*
- *Uttrykk gitt som de samsvarende regler for funksjoner.*
- *Det kartesiske koordinatsystemet brukt som visualisering av resultatet av beregningsprosedyrer snarere enn som punkter i en løsningsmengde*
- *Likhetstegnet som en anvisning av navnet på en spesiell regneprosess (f(x) =…) og som en indikasjon av en identitet mellom to regneprosesser.* (Chazan & Yerushalmy 2003, s. 132, min oversettelse)

En funksjonstilnærming kan gjøre symbolmanipulerings – "lekene" i algebra mer meningsfulle for elevene (Thorpe 1989). Han sier at funksjoner i seg selv kan sees som veldig konkrete objekter som bør presenteres som sådanne for elevene. Min erfaring er at det er lettere å argumentere for ligninger, for eksempel annengradsligninger, når de undervises parallelt med funksjoner. Studenter har lettere for å forstå hensikten med funksjoner enn med ligninger ut over 1. grad.

Tabell 2.5.1 (Gjone 1997) angir fire ulike representasjonsformer: *Situasjon*, *tabell*, *graf* og *formel* som er vanlig i arbeidet med funksjoner i skolematematikken. Tabellen, som også kalles *Janvier - tabellen* etter Claude Janvier som først satte opp tabellen, sier noe om mulige sammenhenger mellom representasjonsformene (eks avlesning, tolkning, plotting osv.)

Tabell 2.4.1: Sammenhenger mellom representasjonsformer i arbeidet med funksjoner

Til **Fra**	**Situasjon**	**Tabell**	**Graf**	**Formel**
Situasjon		Måling	Skisse	Modellering
Tabell	Avlesing		Plotting	Tilpassing
Graf	Tolking	Avlesing		Kurvetilpassing
Formel	Gjenkjenning	Beregning	Plotting	

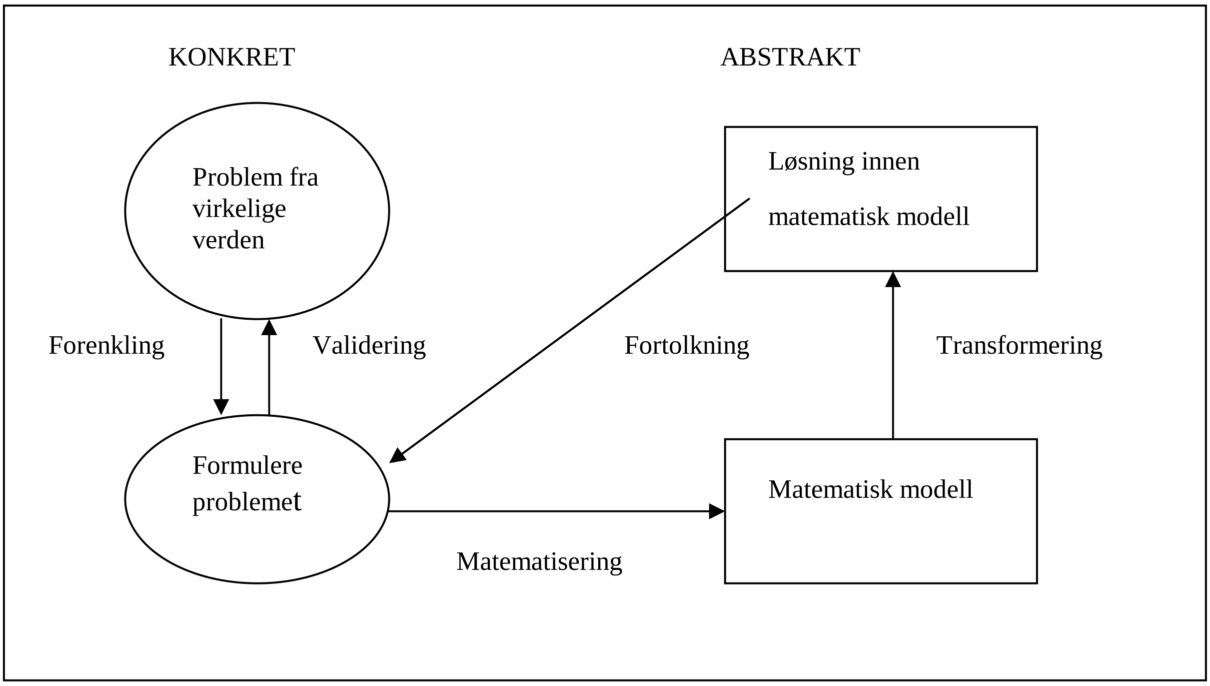
Undersøkelser viser at elevers initielle måte å løse situasjoner som kan modelleres som lineære, eksponentielle og kvadratiske på er ved å sette opp tabell, analysere den fra et kovariant perspektiv og så forsøke å generalisere (Smith 2003). Mens vi som lærere har lært oss å se på forhold mellom tallene i tabellen som en korrespondanse (at y = ax + b) vil kovariant perspektiv bety fokus på endringen (Smith 2003). Dette leder videre mot begreper i høyere matematikk som derivasjon der nettopp endring er sentralt.

Den algebraiske representasjonen kan tolkes både operasjonelt som en beregningsforskrift og strukturelt som en statisk relasjon mellom to mengder (Sfard 1991). Dette er også beslektet med kvantitativ kontra numerisk oppfatning av formler (Thompson & Saldanha 2003, se kap. 2.3.4).

Moderne kalkulatorer gjør det mulig for elever å utforske grafer til funksjoner uten å være i stand til å tegne dem selv ut fra egne beregninger. Dette egner seg etter mitt syn dårlig som eneste hjelpemiddel i utviklingen av et godt funksjonsbegrep. Du kan risikere å ”hoppe over” prosessen og gå rett på objektet. (jfr. Sfard 1991, kap. 2.2.1). En hovedfagsoppgave i realfagsdidaktikk av Billington (2000) ser på bruk av grafiske kalkulator i 1. klasse i videregående skole med fokus på funksjonsbegrepet. Her konkluderes det med at introduksjon av denne type kalkulatorer ikke har forbedret forståelsen for funksjonsbegrepet for den undersøkte gruppen. Samtidig vises det i oppgaven til studier som har sett på arbeid med denne typen kalkulatorer i en konstruktivistisk, utforskende ramme. Dette har vist seg vellykket. Etter mitt syn bekrefter det (nok en gang) at en bevisst og god bruk av et hjelpemiddel er det som har betydning for hvor vellykket det er.

Modellering er ifølge Smith (2003) den praktiske applikasjonen til funksjonsbegrepet. De som modellerer velger en kovariant tilnærming fordi det i de fleste fysiske og biologiske situasjoner, er endring som observeres, som forstås og som er mest viktig. Arbeid med modellering i undervisningssammenheng knytter matematikkopplæringen opp mot praktiske situasjoner, slik at matematikkens begrunnelse kommer tydeligere fram. Samtidig kreves det kunnskap om formell matematikk fordi den matematiske modellen som lages, for eksempel funksjonen, skal analyseres og regnes på.

Det er flere måter å beskrive forholdet mellom matematisk verden og virkeligheten på. Figuren under er hentet fra Grønmo mfl. (2004), s. 42.



Figur 2.4.2: Modellering

Figuren er en modell hva som skjer når matematikk brukes på et praktisk problem, i skolen for eksempel gitt som en tekstoppgave. Først formuleres problemet, deretter matematiseres det for eksempel ved å sette opp en ligning. Så løses denne innenfor strategier for ligningsløsning. For å få til disse to trinnene må elevene beherske et matematisk språk. Den matematiske løsningen tolkes så i forhold til det opprinnelige problemet. Utfordringen for læreren er å etablere en situasjon hvor elevene kan arbeide med noen virkelige fenomener eller situasjoner som de er familiære med, og som lar dem spille på sine matematiske kunnskaper i modelleringsprosessen (Blomhøj 2004).

Problemløsning innebærer også bruk av matematikk for å løse problemer som gjerne har rot i en slags virkelighet, men ikke nødvendigvis. Problemløsningsoppgaver kjennetegnes ved at det kan være mange måter å angripe problemet på og mange løsningsstrategier som kan fungere. Oppgavene kan gjerne være formulert slik at de har en utforskende karakter som trigger lysten til å gå løs på dem. Problemløsningsbegrepet er knyttet til matematikeren Polya (1887 – 1985) og er en prosess i fire deler: Forståelse av problemet, løsningsplan, gjennomføring av planen og vurdering/oppsummering av planen.(Botten 1999). Også i denne sammenheng vil behovet for generaliseringer i form av bokstavregning dukke opp.

2.4.4 Mer om begrepsutvikling i algebra.

Personlig mener jeg at grunnlaget for å forstå algebra ligger i gode kunnskaper om tall og aritmetikk. Dette understrekes av Stephens (2004, se kap. 2.4.3). Abstrahering, overgangen fra aritmetikk til algebra er vanskelig for mange. ”*For at en slik overgang skal kunne skje, må altså elevene både ha et solid tallbegrep og beherske ferdigheter i tallbehandling.*” (Brekke mfl. 2000, s.7). Ifølge Filloy & Sutherland (1996) har nyere forskning pekt på noen begrepsmessige endringer og/eller endringer i symbolbruk som markerer ulikheter mellom aritmetisk og algebraisk tenkning. Disse kan for eksempel være relatert til:

- Ulikheter i fortolkninger/oppfatninger av bokstaver
- Bruk av likhetstegnet.

Brekke mfl.(2000) viser til seks kategorier når det gjelder barns oppfatning av bokstaver. De seks er: Å finne verdien til en bokstav, bokstaver som ikke trengs, bokstaver brukt som objekt, bokstav som en spesifikk ukjent størrelse, bokstav som et generelt tall og bokstav som en variabel. Elever sliter ofte med uttrykk som for eksempel 2x. Her dropper vi det multiplikasjonstegnet som vi bruker i tallregning, og mange tolker dette til å bety at x = 2. I arbeidet med funksjonsuttrykk, for eksempel rette linjer, skaper slike misoppfatninger igjen store problemer. Å skille mellom 2x og x^2 er et annet problem, dette viser seg også i ren tallregning, potensbegrepet er uvant og lite brukt i hverdagen. Et vanlig svar på spørsmålet om hvor mye 3^2 er, er 6. De samme elevene har ingen problemer med å si at $3 \cdot 3 = 9$. Et poeng som Thompson & Saldanha (2003) (se kap. 2.3.4) trekker frem, er at hvis elever leser $5 \cdot 4$ som regnekommandoen 4+4+4+4+4 blir uttrykk som 5x problematisk. Hvis 5x står for et tall som er fem ganger så stort som x, vil det være en naturlig utvidelse av multiplikasjonsbegrepet. Men da må denne tankegangen være innarbeidet fra starten av. Et godt innarbeidet multiplikasjonsbegrep med vekt på proporsjonalitet vil med andre ord bety mye i innarbeiding av bokstavregning (se kap. 2.3.4).

”*Appelsin/banan*” – problemet handler om at elevene tror at bokstavene står for konkrete objekter i stedet for tall. Oppgaven: ”*Det er seks ganger så mange studenter som professorer.” Uttrykk en ligning for dette utsagnet, bruk S om antall studenter og P om* *antall professorer""* (Smith 2003, s.139), vil av svært mange, også voksne (mellom en tredjedel og halvparten i følge undersøkelsen som refereres), besvares feil og da gjerne med at P = 6S. De tenker på P som professorer og at en P er ekvivalent med seks S-er (studenter). Å endre betegnelsene til N_P og N_S (der N står for antall) økte antall rette svar på denne oppgaven. Mange lærere og til og med lærebøker bruker dette feil i innlæringen av sammentrekning av ledd. Det fungerer "godt" så lenge man har å gjøre med uttrykk som 2a + b + a + 6b, men blir problematiske når det er snakk om for eksempel a^2.

I starten av arbeidet med algebra brukes åpne linjer eller bokser som symbol for den ukjente. Dette er oppgaver som enkelt løses med utprøvende metoder, gjerne på formen 4·__ = 12. I en ligning med mange x–ledd er det derimot ikke lenger praktisk å se på x som en tom boks som representerer det tallet 4 skal ganges med hvis det står 4x. I tillegg vil disse tomme boksene kunne gi opphav til manglende variabelforståelse (Stephens 2004).

I tallregning symboliserer likhetstegnet en handling, en operasjonskommando, et resultat av det som gjøres på venstre siden; svaret med to streker under. Svaret på høyre side er alltid et enkelt ledd, mens det i algebra kan være flere ledd som både kan representere et produkt og en prosess (Smith 2003). Et uttrykk som a = 28 + b vil i av mange elever tolkes som at a = 28, så skal b legges til (Smith 2003). Ligninger av typen Ax + B = C vil kunne løses innenfor en aritmetisk tilnærming (Filloy & Sutherland 1996). Ligninger av typen Ax + B = Cx + D med flere ledd på begge sider av likhetstegnet, spesielt variable ledd vil kreve en utvidet forståelse av likhetstegnet som et ekvivalenssymbol. Denne overgangen til algebraisk syntaks og algebraisk tenkemåte representerer skjæringspunkter på det Filloy & Sutherland (1996) kaller "*lines of evolution*". I følge dem vil barn som møter slike ligninger, ikke prøve spontant å operere på x-leddene, men snarere bruke gjett/sjekk-metoder. Lærerens oppgave blir å "blande seg inn" og veilede elevene videre.

Å forstå betydningen av ekvivalente former for uttrykk, ligninger, ulikheter og relasjoner krever at elevene får muligheter til å stille spørsmål som utforsker forskjeller mellom ulike typer ekvivalenser. Det er sentralt at det jobbes slik at elevene oppmuntres til denne type spørsmålsstilling (Chazan & Yerushalmy 2003). Likhetstegnet brukes i formler, ligninger, identiteter, beskrivelse av egenskaper og funksjoner (Chazan & Yerushalmy 2003). Som nevnt i kap 2.4.3 er det viktig å arbeide med å se algebraen i aritmetikken fra småskolealder av.

2.4.5 Algebra i skolen.

Mange oppgir algebra som det emnet innenfor matematikk som har gjort dem negative til faget (Smith 2003). Algebra har også blitt sett på som en slags nøkkel til høyere utdanning, behersker du det kommer du videre. Smith (2003) siterer James Kaput: "*fremmedgjøring fra matematikk for de som overlever dette filtret og et enda større tragisk tap av livs muligheter for de som ikke overlever det.*"(Smith 2003, s.138, min oversettelse)

Personlig tror jeg dette fenomenet er en grunn til at matematikken er blitt underkjent i en del miljøer. Det har vært lov å si at matematikk (i motsetning til gammeldags tallregning) er unødvendig for de aller fleste og at det bare er en liten del av kullet trenger kunnskaper om algebra. Dermed bør ikke den obligatoriske skolen ha det med.

Thorpe (1989) lister opp tre kriterier hvor minst et av dem må dekkes før det er aktuelt å innlemme et emne i læreplaner. Indre verdi, pedagogisk verdi og iboende begeistring eller skjønnhet. Med indre verdi menes emner som vil bli viktige for elevene i deres liv uavhengig av utdannelse. Thorpe (1989) nevner funksjoner som et eksempel på dette. Han påpeker at funksjoner kan undervises på en intuitiv og praktisk måte som ikke krever unødvendig forvirrende abstrahering. Pedagogisk verdi har emner som ikke er opplagt nyttige selv, men som er et nødvendig kunnskapsfundament for andre emner som har en slik verdi. Temaer som kan øke elevenes glede ved og begeistring for matematikk, er viktige i en læreplan sier Thorpe (1989). Vi skal ikke glemme at mange elever har stor glede av å få utvikle sin evne til abstrahering og "leke" seg med algebraoppgaver og ligninger.

3. Læreplaner

3.1 Læreplanteori

3.1.1 Læreplaners rolle

Læreplaner er bindeleddet mellom samfunn og skole. Politiske og økonomiske endringer i samfunnet setter læreplaner under lupen (Bjørg Gundem 1990). I tillegg spiller andre forhold av samfunnsmessig, kulturell eller kunnskapsmessig art inn. Læreplaner fungerer som et styringsverktøy for myndighetene. De ser på skolen som et verktøy for å lede samfunnsutviklingen. Skolen blir fort en syndebukk hvis samfunnet opplever seg akterutseilt på noen måte. Bjørg Gundem (1990) trekker fram *Sputniksjokket* i sammenheng med amerikansk læreplanrevidering som et eksempel. (Amerikanerne fryktet at russerne lå foran dem i teknologisk kunnskap). Et nærliggende eksempel fra Norge og matematikkfaget, er den senere tids påpekning fra ulikt hold om manglende matematikk – kunnskaper hos dagens studenter. Viktig er også næringslivets varsku om behov for kvalifiserte sivilingeniører/ ingeniører i framtiden.

3.1.2 Begrepssystem

John Goodlad (1979) har utviklet et begrepssystem for læreplanforskning. Slik forskning vil omhandle minst tre fenomener som han mener er involvert i planlegging av læreplaner:

- *Substansielle fenomener:* For eksempel mål, innhold, materiell, hvordan det evalueres og lignende.
- *Politiske – sosiale spørsmål*: Hvilke prosesser gjør at noen interesser kommer sterkere til syne enn andre
- *Tekniske – profesjonelle spørsmål, prosesser og problemer*: Utforming, logistikk, evaluering i sammenheng med hvordan læreplaner forbedres, installeres og byttes ut.

Disse tre fenomener kan forkortet sies å handle om hva, hvorfor og hvordan.

Goodlad (1979) snakker om to former for kunnskap som påvirker læreplaner: *Funded knowledge* og *Convensional wisdom*. Det første er rasjonell, viteskapelig begrunnet kunnskap som mange ganger står langt fra samfunnets kunnskapsverdier. I følge Goodlad (1979) er de data som brukes i politiske avgjørelser og som politikere ønsker å tilpasse seg og appellere til av typen konvensjonell visdom. Dette medfører igjen at skolene tenderer til å være konservative institusjoner som tar vare på tenkningen til majoriteten og derfor unngår å bli kontroversielle.

Det skjer læreplanplanlegging overalt hvor det finnes mennesker som er ansvarlige for eller søker å planlegge et undervisningsprogram. Alt fra myndigheter som ønsker opplæring i skadevirkning av rusmidler, via lærerens avgjørelser om bruk av undervisningsmateriale til studenten som velger bøker i et litteraturkurs. (Goodlad 1979). En læreplan består ikke lenge. Hele tiden vil det være noen entusiaster som ønsker forandringer.

Goodlad (1979) lister opp fem ulike nivåer av den faktiske (substansielle) læreplan. De fem læreplanene er som følger:

Den ideologiske læreplan, den formelle læreplan, den oppfattede læreplan, den iverksatte læreplan og *den erfarte læreplan.*

Det første nivået speiler tidsånden vitenskapelig, kulturelt og politisk, og oppstår fra idemessige planleggingsprosesser. Den formelle læreplan er den læreplan som vedtas. Til forskjell fra den ideologiske læreplan foreligger den som skriftlige dokumenter. Ved studier av denne vil man i følge Goodlad (1979) finne hvilke livssyn, verdier, holdninger og liknende som samfunnet eller noen dominerende grupper i samfunnet ønsker at ungdommen skal tilegne seg. Den kan oppfattes ulikt på ulike nivåer og mellom ulike aktører (for eksempel departementet eller den enkelte lærer). Dette gjør at den oppfattede læreplan vil være noe annet enn den formelle læreplan. Goodlad uttrykker det slik: ”*What has been officially approved for instruction and learning is not necessarily what various interested persons and groups perceive in their minds to be the curriculum.*” (Goodlad 1979, s.61). En spesielt viktig gruppe i denne sammenheng er selvsagt lærerne. Deres oppfatning vil ha betydning for hvordan læreplanen settes ut i livet på skolene, altså den iverksatte læreplan. Ulike ytre rammefaktorer som kommuneøkonomi, utdannelsesnivå på lærere og så videre spiller også inn. Allikevel vil det i følge Goodlad (1979) være forskjell på hva den enkelte lærer oppfatter som læreplan og hva han/hun faktisk driver med i klasserommet. Lærere er konservative i den forstand at de erverver seg noen pedagogiske metoder som de holder på. Til syvende og sist kan den læreplanen som den enkelte elev erfarer være ulik læreplanene på nivåene over. Dette fordi den iverksatte læreplan vil være ulik fra elev til elev. I tillegg vil elevens egen bakgrunn, erfaringer og forutsetninger spille inn. Forskning på den iverksatte læreplan og den erfarte læreplan er vanskelig ifølge Goodlad (1979). Det er vanskelig å oppnå reliable målinger, essensielle elementer går tapt i prosessen.

TIMSS bruker landenes læreplanverk i bred forstand som hovedkonsept (Brekke mfl. 1998, TIMSS 2003). Her er det inndelt i tre læreplaner:

- *Intended curriculum,* tilsiktet læreplan: Det som samfunnet ønsker at studentene skal lære og hvordan skolesystemet organiseres for å oppnå dette. Slik jeg ser det svarer det til ideologisk og formell læreplan.
- *Implemented Curriculum,* iverksatt læreplan: Skole, lærer og klasserom, hva som faktisk blir undervist, av hvem og hvordan, altså oppfattet og iverksatt læreplan
- *Attained Curriculum*, oppnådd læreplan: De kunnskaper og holdninger som elevene har tilegnet seg, altså den erfarte læreplan.

3.2 Læreplaner i Norge, M 87og L 97

Elevene i min undersøkelse er undervist etter to ulike læreplaner: M 87 og L 97. Jeg vil i det følgende se på likheter og forskjeller mellom disse ved å studere formell læreplan. Matematikkfaget vil naturlig nok stå i sentrum. Selve datatolkningen jeg skal gjøre, vil forhåpentligvis si noe om implementert og erfart læreplan. Først vil jeg si litt generelt om verdier og holdninger som jeg oppfatter at har preget læreplanene.

3.2.1 Tidsånd

Norsk skolepolitikk gjennom hele forrige århundre var preget av en likhetstanke. Ønsket var å minske forskjellene i samfunnet gjennom lik rett til utdanning for alle. Skolereformene som utviklet seg i denne perioden preges derfor av en intensjon om å utviske faglige, sosiale og økonomiske ulikheter elevene mellom. Arbeiderbevegelsen ville sikre dette gjennom offentlig skole for alle (Braathe & Ongstad 2001). Likhetstanken vises også i at vi har beveget oss mot et likt løp med like læreplaner for alle de første 10,5 årene. De siste to til tre tiår har det samtidig blitt økende fokus på enkeltindividets muligheter og rettigheter. Kunnskapsskolen fremheves sterkest av det politiske høyre. En utvikling av større aksept for private skoler, etter hvert også skoler som ikke er tuftet på pedagogiske eller religiøse ideologier ses. Individuell valgfrihet vurderes i vår tid som en viktig rettighet og verdi.

I de siste tiårene har samfunnet endret seg fra et modernistisk samfunn til det mange betegner som et postmoderne samfunn. Gjeldene kunnskapssyn har beveget seg fra et behavioristisk til et konstruktivistisk syn. Vi kan også si fra et objektivt kunnskapssyn til et subjektivt. Samtidig betones samarbeid og samhandling i tråd med sosiokulturelle strømninger (se kap. 2.1.3). Det snakkes om å gjøre hverandre gode, altså enkeltindividets nytte av samhandlingen.

En tendens mot økt individualisme vises også ved at det etter at L 87 hadde fungert noen år kom en endring av opplæringsloven (2004). Klassebegrepet er nå fjernet. Muligheten til å velge andre organiseringsformer oppmuntres. Lærerollen endres, fra formidler til veileder (se kap. 2.1.4). Fra et system hvor en lærer har alt ansvaret for en klasse på barnetrinnet og der klassen er et arbeidsfellesskap i nesten hele skoletiden har vi beveget oss mot et system hvor elevene organiseres i basisgrupper (som ikke er et så fast arbeidsfellesskap som klassen) og kan velge ulike homogene og heterogene grupper etter interesse.

I L 97 finner vi følgende: ”*Større likhet i resultat skapes gjennom ulikhet i den innsats som rettes mot den enkelte elev*.” (L 97, s. 15). Meningen er muligens at rettferdighet er å behandle alle ulikt ved å ta utgangspunkt i deres forutsetninger. Men utsagnet kan oppfattes som noe merkelig all den tid at det like gjerne kan tolkes dit hen at noen må bremses, slik at andre kan ta dem igjen. Det er en tung erkjennelse at det kan være slik at hvis alle får tilpasset opplæring og dermed får bruke seg maksimalt, er det ikke usannsynlig at forskjellene mellom de flinkeste og de svakeste innen ulike retninger blir større. At retten til tilpasset opplæring også skal omfatte de skoleflinke er noe som har kommet fram i diskusjonen de seneste år. Dette bryter med sterke ideologiske strømninger i vårt land. Fortsatt hører man skolefolk og skolepolitikere uttale at de flinke klarer seg alltid.

3.2.2 Læringssyn i de formelle matematikklæreplaner

Ifølge Alseth mfl. (2003) kan synet på matematikkopplæringen de siste tiårene deles inn i *tradisjonelt syn, konstruktivistisk eller humanistisk syn* og *radikalt syn.* Det tradisjonelle synet bygger på behaviorismen (se kap. 2.1.1) og preget 50/60 – tallet. Det konstruktivistiske synet (se kap. 2.1.2) preget 70/80 – tallet. I tråd med større interesse for bla a Vygotsky (se kap. 2.1.5) har språkets, diskursens betydning for begrepsutviklingen blitt viktigere. I følge evalueringen kan denne tilpasningen til sosiokulturelle læringsteorier (se kap. 2.1.3) betegnes som et radikalt syn. Blant annet blir skolematematikken sett på som noe foranderlig, et sosialt produkt. Disse syn har preget den formelle læreplan i matematikk. I følge evalueringen, sees en klar forskyvning i mer radikal retning i synet på matematikk fra

M 87 til L 97 (Alseth mfl. 2003). Samtidig preges L 97 også i større grad av fokus på enkeltindividet og er slik jeg oppfatter det preget av en kognitiv orientert konstruktivisme.

Følgende fem punkter preger arbeidet med nye læreplaner etter det som omtales som ”*Reform documents*” ifølge Verschaffel & de Corte (1996). Dette gjelder ikke Norge direkte, men jeg finner det interessant å videre se på våre matematikklæreplaner i forhold til disse punktene:

1. Et konstruktivistisk og autentisk læringsmiljø som middel
2. Meningsfull og autentisk kontekst
3. Utvikling mot høyere grad av abstrahering og formell matematikk.
    i. Intuitive ferdigheter har begrensinger på lang sikt grunnet mangel på presisjon, effektivitet og generaliserbarhet.
4. Læring via sosial interaksjon og samarbeid.
    i. Ikke bare individuell jobbing, men også jobbing i større og mindre grupper, utveksling av strategier, snakke matematikk
5. Se sammenhenger
    i. mellom ulike matematikkemner og mellom matematikk og virkelighet

(Verschaffel & de Corte 1996, min nummerering).

Prinsipp 1 og 4 omhandler organisering av undervisning og læringsmiljø. Samtalen som metode anbefales i begge læreplanene i matematikk. Samtaleforum nevnes spesielt i M 87.

”*For å øke elevenes innsikt og forståelse må det være hyppige samtaler og diskusjoner i samlet klasse eller i små grupper”*. (M 87, s.195).

”Elevene konstruerer selv sine matematiske begreper. For denne begrepsdannelsen er det nødvendig å vektlegge samtale og ettertanke”. (L 97, s.155).

Ordet undervisning er i L 97 byttet ut med opplæring, som er i tråd med et konstruktivistisk syn på læring. I M 87 står det i kapitlet om arbeidsmåter i faget matematikk: ” *Lærestoffet kan introduseres ved at elevene først undersøker og eksperimenterer i et godt tilrettelagt læringsmiljø, og/eller ved at læreren viser og forklarer.*” (M 87 s. 195). Den lærerrollen som ”viser og forklarer” er fraværende i L 97. I M 87 står det under fellesmålene: ” *å gi elevene innsikt…..å utvikle elevenes kunnskaper……å sette eleven i stand til osv*”, mens det i L 97 under fellesmål står:” *at elevene utvikler…..at elevene opparbeider ferdigheter… osv”*. Jeg oppfatter det som en bevegelse fra lærerstyring til elevstyring. Ordet undervisning byttes med opplæring. Her mener jeg en slags gylden middelvei er ønskelig.

I L 97 er fokus på elevaktiviteter og utforskende virksomhet sterkere. Det skal i følge planen legges vekt på skapende virksomhet, kreativitet, lek, planlegging, organisering og gjennomføring av praktiske arbeidsoppgaver, selvstendig arbeid og fordypning og altså prosjektarbeid.

Metodestikkord som følge av et radikalt syn er ifølge Alseth mfl. (2003): Problembasert læring, læring som prosess, mappevurdering, læringsfellesskap hvor alle deltagere har et ansvar. Dette viser seg igjen i de mange endringer (eller forsøk på endringer) i arbeidsmetoder i skolen. Tverrfaglige prosjekter er et av disse. Tverrfaglighet kan være en utmerket måte å knytte matematikken til virkeligheten på, jfr. prinsipp 2. Et problem med tverrfaglige prosjekter kan være at matematikken får for liten plass.

Hvis man studerer lærebøker i skolen fra syttitallet og utover, sees en klar dreining mot flere og flere tekstoppgaver (Hovik 2003) og mot oppgaver som skal utføres praktisk. For eksempel ut å måle, handle inn til familien og liknende.

Arbeider man over tid i skolesammenheng, vil man se at mye preges av en slags pendelvirkning, eller flo/fjære om man vil. I Alseth mfl.(2003) nevnes *dannelses- og nytteperspektivet* som et eksempel på pendelvirkning i forhold til synet på matematikkundervisningens formål. Matematikk er alle tekniske fags grunnspråk og dermed viktig for næringslivet i framtiden. Noe av dette kommer til syne i L 97. Der snakkes det også om viktigheten av å kunne orientere seg i samfunnet, stille seg kritisk til urettferdighet. (Ernest 1998, se kap. 2.1.3). Dannelsesperspektivet står etter min oppfatning ikke spesielt sterkt verken i M 87 eller L 97. Matematikkundervisningens rolle i grunnskolen som forberedende for videre utdanning, er også dempet. I følge Alseth mfl.(2003) ble dette sist vektlagt i M74. Årsaken er at grunnskolen er obligatorisk for alle. Det har i praksis videregående også blitt. Der finnes det ikke lenger linjer uten matematikk (etter R94), så det er positivt at sammenhengen mellom de ulike skoleslagene skal sees sterkere i L 06.

Det som klarest skiller de to læreplanene når vi ser på fellesmålene i matematikk, er at L 97 i langt større grad oppfordrer til å finne løsningsmetoder og å være undersøkende, å velge verktøy og redskaper enn M 87. Dette er i tråd med synet på matematikk som en aktivitet, tilstrebelse av en matematisk tenkemåte (se kap 2.2.2). Dette mener jeg kan oppfattes som en viss motsetning til punkt 3 hvor Verschaffel & de Corte (1996) påpeker svakheter ved intuitive ferdigheter på lang sikt og at trenden eventuelt igjen går mot mer formalisert matematikk. De løsningsmetodene elevene finner kan fungere på et nivå, men kanskje skape problemer på et annet og høyere nivå. Egne algoritmer og løsningsprosedyrer kan også ofte være lite effektive.

Det er i overensstemmelse med konstruktivismen å ta utgangspunkt i eksisterende kunnskaper. Ikke bare i såkalte hverdagskunnskaper, men også kunnskaper om andre matematikkemner. Sammenhenger innen matematikken må synliggjøres i undervisningen. Hvis matematikken hele tiden fokuserer på bestemte hverdagssituasjoner kan dette etter mitt syn medføre manglende kunnskap om matematikkens generaliserbarhet. Men samtidig kan det samme problemet også oppstå hvis anvendelse vektlegges for lite. Å erfare at den samme matematikken kan anvendes i mange ulike fagområder er viktig.

Gardiner(2004) kritiserer i sitt foredrag "What is Mathematical Literacy?" reformpedagoger innenfor matematikk i England for å ha introdusert blant annet følgende ikke godt uttestede endringer:

> *"that mathematic classrooms should be guided by discovery, by childrens own "reasons" and by "investigation"", "that prepreoccupation with "mastery" of traditional content should give way to an emphasis on "understanding"" og "that there should be a shift in emphasis from "product" to "process""*. (Gardiner 2004*).*

Han advarer andre land i å følge etter Englands "reformers" og det som i følge ham har skjedd der i de siste 25 år. Jeg oppfatter nyere norske læreplaner i matematikk som påvirket av de tankene Gardiner (2004) her kritiserer. Dette er også interessante innvendinger mot de punkter som nevnes i dette kapitlet og i kap. 2.2.2.

Han omtaler undervisning i såkalt *matematical literacy* og *numeracy* som de nyeste substitutt for tradisjonell skolematematikk. Disse begrepene kan oversettes som matematisk allmenndannelse, eller det motsatte av ”matematisk analfabetisme”.

> *”Mathematics literacy is an individual's ability to identify, to understand, to make well - founded judgements about, and to engage in the role that mathematics plays in dealing with the world, as needed for that individual's current and future life as a constructive, concerned, and reflective citizen.”* (PISA 2003)

Numeracy er et begrep som brukes om noe av det samme, på dansk brukes begrepet *numeralitet* (Kjærnsli mfl., 2004):

> *”Numeralitet er funktionelle matematikferdigheter og – forståelser som alle mennesker principielt har brug for at have. Numeralitet ændrer sig med tid og sted, samfundsudvikling og teknologisk udvikling (Lidensskov og Wedwgw 2000, s. 5).”* (Kjærnsli mfl. 2004, s. 37)

Dette presenteres ofte ifølge Gardiner(2004) som alternativer til tradisjonell skolematematikk heller enn biprodukter av denne. Han siterer Hyman Bass (2004) om at å konvertere store deler av læreplanen til undervisning i mathematical literacy gir som resultat manglende læring av generelle abstrakte prinsipper og fratar dermed eleven det fundament som er nødvendig for å forstå at den matematikken som brukes i en sammenheng kan brukes i mange andre. Slik jeg oppfatter Gardiner (2004) bør etter hans syn mathematical literacy og numeracy være resultatet av en god matematikkundervisning i skolen.

3.2.3 Formell læreplan, organisering M 87 og L 97

Et helt sentralt spørsmål er hvorvidt reformene når klasserommet. Dewey har en meget interessant vurdering av lærernes manglende følelse av medvirkning (Gundem 1990). Han mener at hvis en reform skal nå klasserommet, må aktørene der ha et eierforhold til reformen. Goodlad (1979) drøfter hvorvidt det ikke burde være sånn at lærere, elever og foreldre burde være en enhet med sterkere innflytelse over læreplanavgjørelser. På denne måten kunne hver skole bli en sterkere undervisningsenhet.

Mønsterplanen M 87 skulle være en retningsgivende rammeplan, som ”*forutsetter at den enkelte skole bearbeider, utfyller og konkretiserer det angitte lærestoff* ” (M 87 s. 64). Mønsterplanen skal altså danne grunnlag for et lokalt læreplanarbeid. Fagdelene er bygd opp av hovedemner og delemner i tillegg til generelle retningslinjer om organiseringsformer og arbeidsmåter. Lokalt læreplanarbeid i fagene, er også vektlagt i L 97. L 97 er delt inn i mål og hovedmomenter i de enkelte fag. Her er tidsbruken i hvert fag gitt som årstimer, mens det i M 87 handler om uketimer. Dette gir rom for større frihet gjennom året, noe som også er hensiktsmessig all den tid L 97 fastslår at deler av skoletiden skal være temaorganisert. Temaorganisering er også med i M 87 men det ligger ingen bindinger, bare forslag her. For eksempel foreslås prosjektarbeid som arbeidsform på ungdomstrinnet. I M 87 står den enkelte skole/lærer friere til å velge tema innenfor treårstrinnene, mens det i L 97 ramses opp hovedmomenter for hvert årstrinn. Slik sett kan man si at L 97 låser matematikklærerne mer enn M 87. Samtidig har L 97 færre hovedemner enn M 87, sammenheng og helhet vektlegges sterkere her. Delemnene i M 87 bærer mer preg av oppramsing.

3.2.4 Formell læreplan, tall og algebra M 87 og L 97

De hovedkategorier jeg bruker i min analyse er tall og algebra. Innenfor tall: *forhold/proporsjoner, andeler, tallinjen* og *tallregning.* Innenfor algebra: *ligninger av 1.grad, mønstre, innsetting og negative tall* og *funksjoner* (se mer i kap 4.4.2). I 1995 er gjeldende plan M 87 delt inn etter hovedemner, tre av dem er *tall*, *tallregning* og *algebra*. I L 97 er *tall* et av målene for småskoletrinnet og mellomtrinnet, mens *tall og algebra* er et mål for ungdomstrinnet, det samme er *grafer og funksjoner*.

I M 87 står følgende om brøk og desimaltall; de skal arbeide med uekte brøker, blandet tall og likeverdige brøker på mellomtrinnet, og se eksempler på de vanligste brøkene allerede på småskoletrinnet. Brøk som forhold kommer inn på ungdomstrinnet. Sammenhengen mellom brøk og desimaltall kommer på mellomtrinnet og videreføres på ungdomstrinnet. Der nevnes også posisjonssystemet, mens titallsystemet skal det arbeides med fra småskoletrinnet. Tallenes ordning kommer inn på mellomtrinnet og videre på ungdomstrinnet. Her skal de også arbeide med avrunding av desimaltall. Fortegnstall bringes inn på mellomtrinnet i konkrete sammenhenger, mens oversikt over tallområdene er ungdomsskolestoff.

Det legges vekt på at konkret materiale må brukes særlig på begynnertrinnet. Videre foreslås tallinjen som illustrasjon ved innføring av brøk, desimaltall og fortegnstall.

Når det kommer til hovedemnet tallregning, vektlegges innøving og automatisering av tabellkunnskap for de fire regningsartene. De vanlige algoritmene skal læres, blant annet skal elevene trene på å regne med flersifrede tall uten bruk av lommeregner. Hoderegning og overslagsregning skal det arbeides med.

Når det gjelder delemner her skal de multiplisere flersifrede tall og dele med en og tosifret divisor på mellomtrinnet. Her skal de også kunne addere og subtrahere brøk, multiplisere brøk med helt tall og forenkle og utvide brøker. De skal arbeide med de fire regningsartene spesielt med dekadiske enheter i multiplikasjon og divisjon under emnet *regning med desimaltall*.

Alt dette videreføres på ungdomstrinnet, hvor lommeregner kommer inn, det samme gjør de fire regningsartene for brøker og fortegnstall. Hoderegning og overslagsregning er delemner hele veien, overslag kommer inn på mellomtrinnet.

Elevene fra 2003 i min undersøkelse, byttet læreplan underveis på småskoletrinnet.

L 97 bruker flere ord og har egne hovedmomenter med oppramsing av hva elevene skal for hvert klassetrinn. Her vektlegges ikke tabellkunnskap så sterkt som i M 87, blant annet står det at mer vesentlig enn å pugge multiplikasjonstabellen er det å forstå selve begrepet multiplikasjon og kunne bruke det. Arbeidet med addisjon og subtraksjon kommer inn i 2. klasse. Lommeregner og bruk av dataprogrammer nevnes allerede fra 2. klasse og hele veien opp. Enkle brøker knyttet til praktiske sammenhenger kommer i 3.klasse, desimaltall fra 4. klasse. Hele planen er grundig når det gjelder å foreslå hvor langt de skal gå, for eksempel kan de arbeide med tallene 2, 3, 4, 5 og 10 i forbindelse med multiplikasjonstabellen i 3. klasse. Systematisering av plassverdisystemet starter i 4. klasse, også erfaringer med negative tall. Her jobbes det videre med tallregning, blant annet med multiplikasjon som gjentatt addisjon og divisjon som gjentatt subtraksjon. Hele veien vektlegges tilknytning til praktiske sammenhenger, deriblant for enkle brøker og desimaltall. Det står ingenting om vanlige algoritmer, men mye om å øve på og finne metoder til å regne i hodet og på papiret. Addisjon og subtraksjon av enkle brøker kommer inn fra 5. klasse (gamle 4. klasse). Det samme gjør overslagsregning. Det vektlegges at elevene skal kunne vurdere hvilke regneoperasjoner som er aktuelle i hver enkelt situasjon. I 6. klasse står det om å undersøke tall og utforsking av tallmønstre gjerne knyttet til data og lommeregner. Addisjon og subtraksjon av negative tall kommer inn i 7. klasse. Her skal de lære om brøk som ren tallstørrelse, som del av en størrelse og som forhold mellom to tall. Alle regneartene for alle tall kommer inn først i 8.klasse. Her skal de også bygge opp forståelse for bruk av bokstaver og parenteser i enkle regneuttrykk og formler. Regning med forhold og proporsjoner nevnes ikke før i 9.klasse, det samme med ligninger og ulikheter. Bokstaver brukt for å bevise generelle sammenhenger for blant annet tall og som uttrykk for variable størrelser kommer også her. På ungdomstrinnet arbeides det med grafer og funksjoner, koordinatsystemet, lineære spesielt omtalt i 9. klasse, proporsjonalitet og omvendt proporsjonalitet samt kvadratiske funksjoner i 10. klasse.

Innenfor emnet algebra er ulikhetene mellom gammel og ny læreplan store. I M 87 står det i planen for 4. – 6. klasse at de skal drive med øvelser i forbindelse med praktiske oppgaver for oppstilling av ligninger og ulikheter, i første omgang med utprøving. De skal også drive med enkle øvelser med bokstaver som symbol for tall og innsetting av tall for bokstaver.

For dette trinnet er L 97 mye vagere på det som kan kalles algebra. Det står som før nevnt noe om utforsking av tallmønstre (6. klasse) og å undersøke hvilke regler som gjelder for sammenheng mellom regnearter. De skal etter L 97 finne fram til metoder for å løse ligninger, mens det i M 87 var et klarere fokus på oppstilling og ferdig løsningsmetode. Slik jeg ser det, var det ingenting i M 87 som på dette punktet stenger for en mer åpen, utforskende angrepsvinkling på for eksempel oppgaver hvor ligning er naturlig å velge. Poenget er at læreplanen har en annen ”tone” og oppmuntrer ikke like klart hele veien til utforskende aktiviteter. Ligninger av andre grad nevnes ikke i L 97, mens kvadratiske ligninger er et eget delemne i M 87. Siden Pythagoras er et emne i L 97, må de allikevel komme borti denne tankegangen, men her kommer ikke sammenhengen mellom geometri og algebra fram i planens ordlegging. Under temaet funksjoner nevnes for øvrig kvadratiske funksjoner, men i denne sammenhengen nevnes kun grafisk løsning av ligninger.

Generelt kan man si at L 97 legger større vekt på såkalt retorisk algebra og noe mindre på symbolsk algebra (se kap 2.4). Algebra, ligninger og funksjoner er et eget hovedemne i M 87, og løsning av enkle ligninger gjennom utprøving er mål i småskolen. På mellomtrinnet kommer det sterkere inn med innføring av funksjoner og øvelse med ligninger, begge med en praktisk, utprøvende tilnærming. På ungdomstrinnet i M 87 er delemnene formulert slik at det er sterk vektlegging av formelle løsningsstrategier, for eksempel grafiske og algebraiske ligningsløsninger. L 97 fokuserer på oversettelse fra praktiske problemer til formler, altså selve generaliseringsprosessen. Uttrykket ”eleven skal erfare” brukes også i flere sammenhenger. Hvordan generaliseringer kan brukes til bevis og formulering av generelle sammenhenger er et punkt her.

4. Metoder og gjennomføring

4.1 TIMSS

4.1.1 Rammeverk

Med utgangspunkt i landenes læreplanverk (se kap. 3.1.2) bruker TIMSS kunnskapstester til å måle og beskrive elevers læring i de deltagende land. I tilegg utvikles det spørreskjema som henter informasjon om ulike ting som struktur og innhold i tilsiktet læreplan, læreres forberedelse, erfaring og holdninger, det matematiske innhold i det som faktisk er undervist, instruksjonstilnærminger som er brukt, skolens og klasserommets organisering og ressurser og elevenes erfaringer og holdninger. Rammeverket for 2003 ble revidert i forhold til ”*Curriculum Frameworks for Mathematics and Science*” som ble brukt som basis i 1995 og 1999 for å reflektere endringer i læreplaner og undervisningsmetoder. Denne prosessen har krevd stor deltagelse fra fagfolk i deltagerlandene verden rundt (for mer se Grønmo mfl. 2004).

4.1.2 TIMSS – testene

TIMSS - testene er basert på rammeverket og er utviklet gjennom en internasjonal konsensusbyggende prosess med innspill fra eksperter innen undervisning, matematikk og statistikk

Resultatene av disse testene kan brukes i mange sammenhenger. Dette gjør at politikere og forskere kan motta data om matematikk og naturfag fra overalt og i hovedinnholdsområder som kan:

- *Utvikle og styrke målinger av trender i fagene fra 1995*
- *Tillate sammenligninger av hva man har oppnådd landene i mellom og i kombinasjon med andre TIMSS – data antyde årsaker til forskjeller.*
- *Forsterke evaluering av effekten av matematikk og naturfagsundervisningen innenfor hvert land*
- *Fokusere på aspekter ved utviklingen i matematikk- og naturfagskunnskaper og ferdigheter fra 4. til 8. trinn.*
- *Tilby data for sekundære analyser som er rettet mot å heve læringsnivået og utbyttet gjennom å bedre informasjonen som anvendes når det tas avgjørelser i undervisningssystemer og skoler, og til å forbedre undervisningspraksis.*

(TIMSS 2003, min oversettelse).

Elevpopulasjonene som er valgt for testing er:
Populasjon 1: Barn på 9 og 10 år, definert som den øverste av de to tilstøtende klassene med flest 9 – åringer. I de fleste land er dette 4. klasse.

Populasjon 2: Barn på 13 og 14 år, definert som den høyeste av de to aktuelle klassene som har flest 13-åringer. I de fleste land er dette 8. klasse. (For mer se Grønmo mfl. 2004)

4.2 TIMSS matematikk

4.2.1 TIMSS 1995

TIMSS rammeverk opererte med et analyseverktøy med tre dimensjoner (de samme for matematikk og naturfag): faglig innhold, ferdigheter og prosesser, perspektiver

- Faglig innhold
  - Tallregning, målinger, geometri, proporsjonalitet, ligninger og funksjoner, datarepresentasjon, elementær analyse, begrunnelse og struktur, annet
- Ferdigheter og prosesser
  - Å vite, rutineprosedyrer, problemløsning, matematisk resonnering, kommunikasjon
- Perspektiver
  - Holdninger, yrkeskarriere, likestilling, motivering, tenkemåter

Noen av innholdskategoriene ble slått sammen i analysen og vurderingen av oppgavene. Kategoriene her var: Tall, geometri, algebra, datarepresentasjon og sannsynlighet, målinger, proporsjonalitet. (For mer om TIMMS 1995, se Lie mfl. 1997)

4.2.2 TIMSS 2003

To dimensjoner er fundamentet for matematikkvurderingen, en innholdsdimensjon og en kognitiv dimensjon (tabell 3.1):

- Matematiske innholdsområder
  - Tall, algebra/mønstre, målinger, geometri, data
- Matematiske kognitive områder
  - Fakta og prosedyrekunnskaper, bruk av begreper, løsing av rutineproblemer, resonnering

I TIMSS etterstrebes en variasjon i vanskelighetsgrad i forhold til både innholdsdimensjonene og de kognitive dimensjonene. Den kognitive kompleksiteten til en oppgave øker fra en dimensjon til den neste, fra venstre mot høyre (Grønmo mfl. 2004). Strukturen på disse områdene, reflekterer viktigheten av å kunne sammenlikne med tidligere undersøkelser.

Tabell 4.1: Tid satt av til testing av emnene i TIMSS 2003

	4.klasse	*8.klasse*
Matematisk innhold		
Tall	40%	30%
Algebra	15%	25%
Målinger	20 %	15 %
Geometri	15 %	15 %
Datarepresentasjon	10 %	15 %
Matematiske kognitive områder		
Fakta og prosedyrekunnskaper	20%	15%
Begrepsbruk	20%	20%
Løsing av rutineproblemer	40%	40%
Resonnering	20%	25%

(For mer om TIMSS 2003, se Grønmo mfl. 2004)

4.3 Metoder og gjennomføring av TIMSS-undersøkelsen

4.3.1 Datainnsamling

I min oppgave har jeg kun brukt data fra TIMSS-undersøkelsene. Jeg har sett på tall og algebraresultater for norske åttendeklassinger i 1995 og 2003, med vekt på eventuelle endringer. TIMSS-undersøkelsen har i tillegg til matematikkoppgaver og naturfagoppgaver egne spørreskjema til skole, lærer og elev. Jeg har sett på data fra elevspørreskjemaet og lærerspørreskjemaet fra TIMSS 1995 og TIMSS 2003.

4.3.2 Oppgaver

I TIMSS 1995 var det **150 matematikkoppgaver** for populasjon 2. Kategoriene var:

- Brøker og tallforståelse: 51 oppgaver
- Algebra: 27 oppgaver
- Målinger: 18 oppgaver

- Geometri: 23 oppgaver
- Datarepresentasjon, analyse og sannsynlighet: 20 oppgaver
- Proporsjonalitet: 11 oppgaver

Oppgavene var inndelt etter dimensjonen ”Ferdigheter og prosesser” med underkategorier (se kap. 4.2.1):

TIMSS 2003 besto av **185 matematikkoppgaver** for populasjon 2. Innholdskategoriene var:

- Tall: 56 oppgaver
- Algebra: 42 oppgaver
- Geometri: 28 oppgaver
- Målinger: 27 oppgaver
- Datarepresentasjon: 21 oppgaver

Noen oppgaver er ikke plassert inne i disse kategoriene, dette forklarer at summen av oppgavene i kategoriene og totalsummen ikke er identisk.

Oppgavene er også kategorisert etter en kognitiv dimensjon (se kap. 4.2.2).

4.3.3 Oppgavetyper

TIMSS anvender to oppgavetyper:

- Flervalgsoppgaver
- Åpne oppgaver

Flervalgsoppgaver er mye brukt fordi de gir høyere reliabilitet ved at de er relativt raske å besvare og dermed gir økt antall oppgaver i undersøkelsen. De gir også høy sensorreliabilitet, da de er enkle å vurdere på en objektiv måte. I tillegg er det praktisk i forhold til tidsbruk og administrasjon. Et problem med flervalgoppgaver er at noen av de som krysser av for rett svar, gjetter blindt og har flaks. Når man betrakter resultatene til enkeltelever i en stor undersøkelse som TIMSS, vil dette sannsynligvis jevne seg ut gjennom heftet. Begrunnelser for å ikke bare velge flervalgsoppgaver er at noen sider ved elevenes kunnskaper i matematikk ikke så lett fanges opp.

> ”*I de åpne oppgavene kan ikke elevene gjette seg fram til svaret på samme måte, man får lettere innsikt i elevenes begrunnelser for hvordan de svarer og man kan finne fram til eventuelle feilforestillinger som ikke alltid legges inn i svaralternativene i flervalgsoppgaver.*” (Brekke mfl. 1998, s.14)

I 1995 var litt over 80 % av oppgavene flervalgsoppgaver, litt under 20 % var åpne oppgaver. I 2003 var omtrent 60 % av oppgavene flervalgsoppgaver og 40 % åpne oppgaver.

4.3.4 Deltagere

Utvalget av respondenter er gjort slik at de skal representere hele populasjonen av skoler, klasser og elever. I TIMSS blir hele klasser trukket ut. Populasjonen ble delt inn i strata (undergrupper) etter kriterier som skolestørrelse og skoletype, region og kommune. Et antall klasser fra hvert stratum trekkes. Dette for å gjøre utvelgelsen mer effektiv. Noen elever ble ekskludert fra utvalget etter internasjonale kriterier. Dette kan for eksempel gå på funksjonshemminger som hindrer gjennomføring eller manglende språkkunnskaper i oppgaveheftenes språk.

For populasjon 2: I **1995**: 5758 elever fra 252 skoler I **2003**: 4133 elever fra 179 klasser fordelt på 138 skoler. Det er de samme elever og deres matematikklærere som har besvart elev- og lærerspørreskjema.

4.3.5 Oppgavehefter

I 1995 var oppgavene fordelt på 8 hefter. Heftene var delt inn i del 1 og del 2. Naturfag og matematikkoppgaver var med i alle heftene. Elevene fikk 90 minutter på seg. Hver elev fikk et hefte. Noen oppgaver gikk igjen i alle heftene, noen i tre til fire hefter og noen i bare ett hefte. Det var vektlagt at alle heftene skulle ha samme vanskelighetsgrad.

Oppgavene i 2003 var fordelt på 12 hefter, også her inndelt i del 1 og del 2. I seks av heftene var matematikkoppgavene plassert først og sist i heftet med naturfagoppgaver i midten. I de seks andre heftene var det omvendt. Elevene i populasjon 2 fikk 90 minutter (2 x 45 min) på seg. Her er også noen av oppgavene gitt oftere enn andre etter bestemte kriterier.

De fikk lov til å bruke kalkulator i del 2 i 2003.

4.3.6 Retting og koding

I 1995 ble det utviklet et internasjonalt kodesystem for de åpne oppgavene. Dette systemet er tosifret og er ment å ivareta et diagnostisk perspektiv. Dette betyr at ulike feil gir ulike koder. Første siffer angir om svaret er riktig eller galt og eventuell grad av riktighet. 10 % av heftene i Norge ble rettet av to uavhengige personer og hadde et samsvar på 93 %, noe som er svært bra. Deltagelse på internasjonale retteseminarer med påfølgende trening av sensorer nasjonalt skulle sikre høy sensorreliabilitet. Dette kodesystemet ble også brukt i 2003

Resultatene ble punchet inn på datafiler som dannet grunnlaget for statistiske analyser.

4.4 Mine metoder og gjennomføring

4.4.1 Bruk av spørreskjema

Alle elevene som deltok i TIMSS 1995 og TIMSS 2003 har altså besvart et elevspørreskjema. Matematikklærerne i klassene hvor disse elevene gikk har besvart et lærerspørreskjema. Begrunnelsen for å ta med disse dataene er at det er sannsynlig at de kan si noe om undervisningen og eventuelle endringer her. Dette kan muligens gi meg svar på noen av forskningsspørsmålene mine. Spørsmålene går på alt fra hvorfor de tror de har nytte av matematikk, hvordan de arbeider i timene og holdning til matematikk. Jeg har kun brukt de spørsmålene som er så like at jeg finner det mulig å sammenlikne.

4.4.2 Mitt oppgaveutvalg.

Problemstillingen her var hvordan jeg skulle gjøre et best mulig utvalg av oppgaver. Etter hvilke innholdskriterier skulle jeg velge oppgaver og hvor mange oppgaver skulle være med?

Jeg startet arbeidet med å gjøre meg kjent med alle oppgaver innenfor kategoriene tall og algebra for begge år. Deretter grovsorterte jeg oppgavene etter tema. Siden det er utviklingen fra 1995 til 2003 som er mitt fokus, har jeg så valgt å ta utgangspunkt i de 12 *trendoppgavene* og gruppere de andre oppgavene jeg bruker i innholdskategorier under disse. Trendoppgaver er de oppgavene som har vært gitt til elevene flere ganger, for norske elevers del i 1995 og i 2003. Det er 6 talloppgaver og 6 algebraoppgaver det dreier seg om.

Det er to grunner til at jeg kuttet i det totale antall oppgaver jeg ville analysere. Ikke alle oppgaver passer inn under mine kategorier. I tillegg vil jeg gå dypere inn på hver oppgave og det forutsetter at det ikke er med for mange. Følgende innholdskategorier er valgt:

Tall: *Proporsjoner og forhold*, *Andeler med halvkonkreter, Andeler med tekst, Plassering på tallinje/overslagsregning, Tallregning (pluss og minus)*

Algebra: *Ligninger av første grad med en ukjent*, *Mønstre uten figurer, Mønstre med figurer, Innsetting/ regning med negative tall*, *Funksjoner*

Jeg har valgt å bruke begrepet halvkonkreter om alle tegnede symboler i oppgavene. For mer, se tabell 4A og tabell 4B i Appendiks.

Siden flere av trendoppgavene omhandler omtrent samme tema og krever at elevene behersker samme emneområde, er det i to av kategoriene flere trendoppgaver. Derfor er det 10 kategorier, ikke 12. Dette vil ytterligere beskrives og begrunnes i analysekapitlet. Noen av oppgavene kunne vært plassert i flere kategorier, så der har jeg måttet ta et valg. Disse valgene begrunnes underveis i analysen av de enkelte oppgaver. Jeg har valgt å løsrive meg fra kategoriseringen i TIMSS for å kunne se på materialet med andre øyne.

Det har vært enklere å velge oppgaver i noen av kategoriene enn andre. Hvis kriteriet alene skal være at oppgavene er helt samsvarende, vil det for noen av trendoppgavene være vanskelig å finne tilstrekkelig med andre aktuelle oppgaver. I tillegg er det slik at en oppgavetype det var mange av i 1995, er det færre av i 2003 og omvendt. Derfor har jeg ikke lagt meg på den linjen at det skal være med like mange oppgaver fra 1995 og fra 2003 i hver kategori.

Et godt eksempel på denne skjevheten er mønsteroppgaver i algebrakategorien. Her avspeiles en trend mot å konsentrere seg om algebra som generalisert aritmetikk (se kap 2.4.3) og i den sammenheng bruke ulike mønstre med eller uten halvkonkreter som fyrstikktegninger og figurtall. Denne oppgavetypen er det betraktelig færre av i 1995. Når det gjelder tallinjeplasseringsoppgaver er det omvendt. Der er det flest i 1995. Den samme tendens gjelder oppdelingen av tallregning i heltall, desimaltall og brøk.

4.4.3 SPSS

SPSS er et statistisk program som kan brukes til å beregne slike statistiske data. SPSS er en forkortelse for ”The Statistical Package for the Social Science”. Jeg har brukt programmet til å beregne frekvenstabeller for hver enkelt oppgave i min undersøkelse. Disse tabellene viser hvor mange som har svart på de ulike valgene. Frekvens, relativ frekvens og kumulativ frekvens regnes ut. Jeg har valgt å se relativ frekvens i forhold til alle som har fått oppgaven. Dette kan velges i programmet. For åpne oppgaver er det tilsvarende plottet inn hvor mange som har svart riktig, delvis riktig og diverse typer feil.

4.4.4 Beregninger

Problemstillingene her har dreid seg om hvordan antall prosent riktig svar på en oppgave beregnes og om å finne en metode som gjør det mulig å sammenlikne på tross av at de fleste oppgaver jeg analyserer i hver kategori er ulike i 1995 og 2003.

Frekvensskjemaene for hver oppgave viser hvor mange som har rett svar. For enkelhets skyld har jeg for åpne oppgaver ikke skilt mellom kodene med førstesiffer 2 og 1. Det vil si at de som har fått ett poeng på oppgaver hvor det kan oppnås to poeng er med i den prosenten rett svar som angis. Dette gjelder også for de internasjonale tallene jeg sammenlikner med. Siden det er få slike oppgaver og jeg er ute etter en tendens mer enn eksakte tall, har jeg valgt denne løsningen.

Jeg har valgt å beregne relativ frekvens ved å dividere antallet rette svar på oppgaven med antallet som har fått utdelt oppgaven. Også de som ikke har besvart oppgaven er dermed med. Dette er fordi mitt fokus har vært å få rede på prosent riktig svar på hver oppgave. De ulike feilsvar kommenteres underveis i analysen der jeg finner det interessant. Er det for eksempel andre typer feilsvar på en oppgave i 2003 enn i 1995, kan det si noe om utviklingen i perioden.

For at jeg skal kunne si noe om norske elevers kunnskaper og eventuelle endringer i perioden, kan jeg ikke bruke disse elevenes oppnådde prosent riktig svar direkte. Dette kan kun gjøres for trendoppgavene som er like og må kunne anses som like vanskelige. De kan derfor også sammenliknes direkte. Jeg har valgt å konsentrere meg om forskjeller på 5 – 6 prosentpoeng. Dette fordi jeg anslår standardfeilen til maksimalt 3 %. Følgende beregning viser dette.

En beregning av standardavvik etter formelen $SD = \sqrt{p(1-p)}$ gir et tall mellom 0,45 og 0,5. Hvis for eksempel 59 % har greid oppgaven (som er gjennomsnittet for trendoppgaver tall 1995), er p = 0,59. $SD = \sqrt{0{,}59 \cdot 0{,}41} = 0{,}49$. Tallet blir noe lavere dess flere som har greid oppgaven og omvendt. Standardfeilen beregnes etter følgende formel: $SE = \frac{SD}{\sqrt{n}}$ der n er antall elever per hefte. I 2003 var antallet elever i populasjon 2: 4133 (se kap. 4.3.4). Med 12 hefter vil n være omtrent 350. Dette gir standardfeil $SE = \frac{0{,}5}{\sqrt{350}} \approx 0{,}027$. For 1995 er n høyere, noe som vil gi en lavere standardfeil. I tillegg står trendoppgavene i flere hefter så dette betyr også at n i virkeligheten er høyere.

For alle oppgavene (inklusive trendoppgavene) foretar jeg en sammenligning med 16 land (se kap. 4.4.4) som har deltatt både i 1995 og 2003. Et gjennomsnitt av hvor mange prosent som har fått rett svar på hver oppgave for de 16 landene er brukt som *målestokk*.

Det norske resultatets avvik fra det internasjonale gjennomsnittet for hver oppgave beregnes først. Avviket beregnes slik: norsk score minus internasjonal gjennomsnittsscore (på oppgaven). Deretter beregnes hver kategoris gjennomsnittlige avvik for 1995 og for 2003.

I sammenligning mellom 1995 og 2003 tar jeg tallet fra 2003 og trekker fra tallet fra 1995. Et negativt tall vil da angi at snittet i 2003 er lavere enn i 1995.

Mine opprinnelige beregnede tall for prosent riktig svar ved bruk av SPSS avviker litt fra tilsvarende tall når vekting er tatt hensyn til. Hver enkelt elev som har besvart oppgaven, representerer et antall andre elever. Siden noen representerer flere enn andre, har de ulik vekt. Jeg har valgt å bruke de tallene hvor dette er korrigert for når jeg ser på prosent rett svar. Mine opprinnelige tall, hvor jeg summerte alle elever som hadde riktig svar og delte på alle elever som hadde mottatt oppgaven, avvek i hovedsak på den måten at de lå noen prosentpoeng lavere. Siden beregningen i de ulike land tar hensyn til vekting, vil det også være mest korrekt å bruke de tilsvarende norske tall. Når det gjelder prosenter for ulike feilsvar har jeg valgt å bruke mine opprinnelige tall. Disse tallene brukes kun til å se etter hvilke feil som er mest vanlig hos de norske elevene. Her foretas ingen internasjonal sammenlikning.

4.4.5 De 16 sammenligningslandene

Her har problemstillingen vært å finne hvilke land som det er hensiktsmessig å sammenlikne med. Begrunnelser for utvalg av land er elevenes alder, at landene deltok begge år og at det er med land fra alle deler av Europa (Grønmo mfl. 2004). Det er også med land fra ulike deler av verden unntatt Afrika og Sør-Amerika. Det er viktig å merke seg at de norske elevene er blant de yngste, 13,8 år og har færrest år på skole bak seg, 7 år mot 8 år for de fleste andre landene.

Landene jeg har valgt er:

Asia: Hong Kong, Korea, Singapore, Iran, Japan

Oceania: Australia, New Zealand

Europa: Nederland, Skottland, Ungarn, Romania, Slovakia, Belgia (flamsk del),

Russland, Kypros

Nord - Amerika: USA

Det er naturlig å ta med flest land fra Europa, siden Norge er en del av en europeisk tradisjon når det gjelder skole. Samtidig er det store ulikheter innad i Europa, og land fra nord, sør, øst og vest er med. For Asia er ulikheten i resultat spesielt stor mellom øst og vest, det vil si Iran og de andre. Australia, New Zealand og USA har en skolekultur mer i slekt med den europeiske.

Tabell 4.3 viser hvor mange prosentpoeng hvert land ligger under (negativt tall) eller over gjennomsnittet for de samme landene jeg har sammenliknet med når det gjelder oppgavene totalt. Det totale gjennomsnittet i prosent rett svar er i 1995 på 64 % og i 2003 på 56 %.

Tabell 4.2 Utvikling i forhold til gjennomsnittet for alle 16 land i mitt oppgaveutvalg

Land	**1995**	**2003**	**Endring**
Korea	13	18	5
Hong Kong	11	16	5
Nederland	-1	2	3
Skottland	- 9	-7	2
USA	- 4	- 2	2
Ungarn	2	4	2
Romania	- 12	-11	1
Singapore	19	20	1
New Zealand	- 6	-8	-2
Australia	- 1	- 3	-2
Russland	0	-2	-2
Japan	13	11	-2
Belgia (fl)	7	4	-3
Iran	- 21	- 24	-3
Kypros	- 11	- 15	-4
Slovakia	2	- 3	-5
Norge	**-9**	**-19**	**-10**

Her vil jeg bemerke at de norske tallene ikke er med i det utregnede gjennomsnittet som jeg har brukt. Siden Norge ligger lavt, ville dette snittet vært noe lavere og dermed ville avstanden vært noe mindre for Norges del. Endringskolonnen viser at for de fleste lands vedkommende er endringen liten, størst positiv endring har Hong Kong og Korea, mens Norge befinner seg i andre enden med størst negativ endring. Åtte av landene har hatt en positiv endring, mens ni har hatt en negativ endring, for de fleste mellom ett og tre prosentpoeng. (For mer se Grønmo mfl. 2004).

For hele TIMSS-undersøkelsen har det internasjonale gjennomsnitt sunket fra 513 i 1995 til 467 i 2003, noe som blant annet skyldes et økt antall deltakerland fra flere utviklingsland (Grønmo mfl. 2004). Disse tallene (513 og 467) kommer fram når man beregner en standardisert score, z-score, ut fra råmaterialet. Her er z-score transformert til en såkalt T-score med 500 som middelverdi og 100 som standardavvik. Denne transformeringen endrer ikke mønstret til den originale fordelingen. Norge lå ti poeng under dette snittet i 1995, og seks poeng i 2003. Siden dette snittet har sunket med hele førtiseks poeng, er ikke det norske resultatet i realiteten bedre i 2003 enn i 1995.

5. Resultater og analyser

I dette kapitlet vil jeg foreta en analyse av data fra de to TIMSS-undersøkelsene. Jeg vil starte med å analysere besvarelsene på matematikkoppgavene. Deretter vil jeg se på spørsmål som har vært stilt til elever og lærere i det samme utvalget.

5.1 Analyse av de enkelte oppgaver

Her vil jeg analysere oppgave for oppgave under de kategoriene jeg har valgt å bruke (se kap. 4.4.2). Jeg vil gjennomgå mine resultater og beregninger og vurdere mine funn underveis. Hva som kreves av kunnskaper og ferdigheter for å løse de enkelte oppgavene vil gis som en ytterligere begrunnelse for valg av akkurat disse oppgavene. Til slutt vil jeg kombinere disse enkeltoppgavedrøftingene med mer generelle drøftinger innenfor hver kategori og innenfor hovedkategoriene tall og algebra. Jeg velger å gjøre det slik for å oppnå best mulig lesbarhet. I drøftingskapitlet vil hovedtrekkene omhandles.

Det er vanskelig å sammenlikne oppgaver som er tilsynelatende like, to ulike tall, f. eks 7 i stedet for 5 kan være med å gjøre en oppgave vanskeligere. Allikevel velger jeg å se på oppgaver sammen som stiller samme spørsmål og drøfte disse samlet.

5.2 Talloppgaver

I de oppgavene jeg har valgt å ta med, må ulike matematikkemner beherskes. Oversiktstabeller som viser hva jeg mener hver enkelt oppgave tester av matematikkunnskaper er plassert i Appendiks (se tabell 5.A, 5.B og 5.C). Oppgavene som angis som et femsifret tall er fra TIMSS 2003, oppgaver som angis med en bokstav og et siffer er fra TIMSS 1995. De oppgavene som er offenlige vises i egne rammer, de andre omtales bare.

5.2.1 Kategori proporsjonalitet / forhold

Oppgavene i denne kategorien tester flere ting og er av ulik vanskelighetsgrad. Felles for alle oppgaver er forståelse for bruk av brøk /divisjon som uttrykk for forholdet mellom to størrelser (Behr mfl.1993, Dörfler 2004, se kap. 2.3.4). Jeg har ikke tatt med oppgaver med et fast tillegg. Oppgavene krever forståelse for multiplikative strukturer ut over å se multiplikasjon som gjentatt addisjon (Thompson & Saldanha 2003, se kap. 2.3.4).

I flere av oppgavene er det naturlig å tenke ”veien om 1” som løsningsstrategi. Med det mener jeg at man med divisjon for eksempel kan finne hvor mye en enhet av en vare er verd, for så å multiplisere med det etterspurte mengde av varen. Det er også mulig å telle seg fram, når forholdet mellom jenter og gutter er 4:3 som i en av oppgavene, kan man tenke at vi har 4 jenter, så 3 gutter, så 4 jenter igjen og så videre.

Tabellen nedenfor forekommer for hver kategori. Den viser differansen mellom hvor mange prosent som har rett svar på oppgaven i Norge og gjennomsnittet av de landene jeg har sammenliknet med (se kap 4.4.4 og kap. 4.4.5). Gjennomsnittet av disse differansene beregnes og utheves for henholdsvis 2003-oppgavene og 1995-oppgavene.

Til slutt beregnes endring i gjennomsnittsdifferanse ved å trekke tallet for 1995 fra tallet for 2003. Et negativt svar til høyre i siste rad vil dermed angi en negativ trend.

Tabell 5.2.1 Resultater i kategorien proporsjonalitet/ forhold

Oppgavenr	**Trend**	**År**	**Prosent rett svar Norge**	**Internasjonalt snitt**	**Differanse**
12004	Ja	2003	52	54	-2
32533		2003	44	60	-16
32160		2003	15	33	-18
22106		2003	15	40	-25
32701		2003	64	86	-22
32704		2003	49	69	-20
				Gjennomsnittsdifferanse	**-17**
A4	Ja	1995	58	58	0
M6		1995	19	44	-26
B8		1995	63	72	-10
D8		1995	64	75	-11
L14		1995	15	29	-13
				Gjennomsnittsdifferanse	**-12**
				Differanse mellom 2003 og 1995	**-5**

Som tabellen viser lå de norske elevene godt under det internasjonale snittet i 1995 for denne kategorien. Da var disse oppgavene plassert under en egen kategori i TIMSS-undersøkelsen. I 2003 er de plassert under kategorien tall. Jeg har valgt å gjøre det samme. Endringen i avstand fra det internasjonale snittet fra 1995 til 2003 er på -5 prosentpoeng. Kun trendoppgavene kan sammenliknes direkte. Her er endringen på -4 prosentpoeng.

Oppgavene 22106, 32701 og M6

M6 I en klasse er det 28 elever. Forholdet mellom antall jenter og gutter er 4: 3. Hvor mange jenter er det i klassen? Svar: ________________________ Rett svar: 16 jenter

Oppgavene er såpass like at jeg finner det naturlig å drøfte dem samlet. Alle tre oppgir forholdet mellom to størrelser. I tabell 5.2.1 ser vi at de tre oppgavene har ulik vanskelighetsgrad. De norske elevene ligger mer enn 20 prosentpoeng under det internasjonale snittet for alle tre. 22106 og M6 er oppgaver som krever lik løsningsstrategi. Delingstegnet brukes ikke i 22106 når forhold skal angis, dette kan ha betydning for oppfatning av oppgaven. Det er noe høyere prosent som har fått poeng på M6 (19 %), enn 22106 (15 %). Samtidig gjør de norske elevene det litt bedre i forhold til det internasjonale snittet i 2003 enn i 1995. Dette snittet ligger for øvrig også lavt. Det som er klart, er at denne typen oppgaver er vanskelige. Sannsynligvis forstår mange ikke spørsmålet. Forholdsregning nevnes i mange internasjonale artikler om temaet som en del av brøkbegrepet som det arbeides lite med. Begrunnelsen ligger blant annet nettopp i vanskelighetsgraden. M6 har over 20 %."Andre gale svar". Feilsvarene 12 (antall gutter), 21 (3/4 av 28) og 7 (28/4) er omtrent like vanlige (ca 8 – 9 %). Dette tyder på at de har knyttet oppgaven til brøk/divisjon, uten å se at de kan bruke 7 som en "grunnmengde". 24 % har av ulike årsaker ikke har svart. (Brekke mfl. 1998). Dette bekrefter at oppgaven har vært vanskelig. Det samme gjelder for 22106. Der er andre typer feil helt oppe i 50 %. Noe av dette kan kanskje skyldes at divisjonstegnet er byttet ut med ordet "til", slik at brøk/divisjon ikke prøves i samme grad.

I 32701 øker prosenten rett svar dramatisk både nasjonalt og internasjonalt, men avstanden til det internasjonale gjennomsnittet er fortsatt stor. Dette er en lettere oppgave, dividend er 1 så det er lett å dele direkte. I tillegg er svaralternativer gitt i oppgaven. Dette betyr at de kan gå fra svaret og teste dette ved å multiplisere med 12. De fleste feilsvar på denne oppgaven er henholdsvis rundt 16 % på svar 8 og 12 % på svar 10. De kan ha tenkt 12 + 1 eller 12 – 1 som grunnenhet.

Oppgavene 32533, 32704 og B8

32533 En maskin bruker 2,4 liter bensin på 30 timer. Hvor mange liter bensin vil maskinen bruke på 100 timer? A 7,2 B 8,0 C 8,4 D 9,6 Rett svar: B 8,0

Alle tre er ”veien om en” – oppgaver. Elevene velger mellom ulike svaralternativer. B8 har betydelig enklere tall enn 32533 og noe enklere enn 32704. I B8 er det lett å regne ut svaret i hodet, delvis er det også tilfelle med 32704. Dette kan forklare noe av ulikheten i prosent rett svar, men ikke forskjellen i avstand til det internasjonale snittet.. Tabell 5.2.1 viser at B8 er greid av flere (63 %) enn 32533 (44 %) og 32704 (49 %). Samtidig er også differansen fra det internasjonale snitt for 32704 og 32533 en god del større, noe som kan tyde på en negativ utvikling i kunnskaper som trengs for å løse denne typen oppgaver.

Hver fjerde elev svarer 100 kcal i stedet for 90 kcal på B8. Antakelig deler de 300 på 3 (Tenker i farten at 100 : 3 er 30). For 32533 svarer nesten hver fjerde elev 8,4 liter og ca 15 % 7,2 liter. 7,2 liter skyldes muligens en direkte multiplikasjon av 2,4 med 3. På samme måte som i B8 tenker de at $30 \cdot 3$ er 100. 8,4 kan forklares med noe liknende, de multipliserer med 3,5 når de går fra 30 timer til 100 timer. I oppgave 32704 er det nesten 25 % som velger 200 t som svar, det er mulig at de i farten tenker at 120 delt på 5 er 25, eller at de velger et ”pent” svar. Altså samme tendens til unøyaktighet som over. Mange, ca 15 % har også valgt 168t som svar, at 120 : 5 er 21 kan være feilen her. Vi kan heller ikke se bort fra ren gjetting på disse flervalgsoppgavene. Generelt viser feilsvarene en mulig tendens til unøyaktig hoderegning, kanskje fordi eksakthet i den sammenheng ikke er nok vektlagt i undervisningen (Gardiner 2004). Alle tre oppgaver har høy svarfrekvens, på B8 er det bare 2 % som ikke har svart. Det tyder på at dette ikke virker avskrekkende på elevene. Det er samtidig klart at det er lettere å gå løs på 32533 hvis du har kalkulator, men det er kun tillatt i Del 2 i 2003.

Oppgave D8

Dette er en annen type oppgave, som også overlapper med formel/ ligningsoppgaver i algebra. Ligning er ikke en strategi norske åttendeklassinger bruker noe særlig all den tid dette ikke vektlegges i norske læreplaner. I oppgaven brukes ordet forhold direkte, derfor har jeg valgt å plassere den her. Forståelse for likeverdige brøker er nødvendig. Det er en flervalgsoppgave som 64 % av elevene har greid mot 75 % internasjonalt. Avstanden er altså omtrent det samme som gjennomsnittlig avstand for disse oppgavene i 1995. Flest feil er svaralternativet x = 13 (14 %), noen har valgt x = 7 (12 %) noe som nok viser at de ikke har oppfattet hva forhold uttrykker og har valgt et av tallene i oppgaven. De kan ha sett etter likhet i utseende og dermed valgt enten teller eller nevner i oppgitt brøk. Ca 94 % av de som har fått oppgaven har besvart den.

Oppgave 32160

Regnemessig er oppgaven lik 22106, 32701 og M6 og kunne for så vidt vært omtalt sammen med disse. Denne oppgaven er gitt i 2003 og har blitt korrekt besvart av 15 % av de norske elevene. Internasjonalt har 33 % greid den, noe som bekrefter den store avstanden til det internasjonale snittet for denne typen oppgaver. Konteksten er kjemi, begrepet legering brukes. Det er sannsynligvis et ukjent begrep for mange av elevene. Omtrent 95 % har svart, så de har ikke skremt bort så mange som man kanskje skulle tro. Her uttrykkes også forholdet som tekst (i likhet med 22106 og 32701). Ca 40 % svarer alternativ B: 10g. Dette betyr nok at de har delt 40 på 4 og samtidig oversett at det er sølvet det er mest av i legeringen. Ca 30 % svarer 30g, noe som tyder på at de har gjort samme feil som over, delt i fire deler i stedet for fem, men forstått at det er sølv det er mest av (3/4). 9 % har svart 8g, korrekt mengde gull. Det kan skyldes en ren lesefeil. Feiltypene bekrefter nok også problemet mange har med en tekstoppgave som inneholder mye informasjon (se kap. 2.3.7).

Oppgave L14

L14

x og *y* er proporsjonale størrelser. Tabellen under viser verdiene til *x* og *y* .

x	3	6	P
y	7	Q	35

Hvilke tall står *P* og *Q* for ?

A. *P* = 14 og *Q* = 31

B. *P* = 10 og *Q* = 14

C. *P* = 10 og *Q* = 31

D. *P* = 14 og *Q* = 15

E. *P* = 15 og *Q* = 14

Rett svar: E. P = 15 og Q = 14

Oppgaven kunne vært plassert under funksjoner. Siden begrepet proporsjonalitet brukes , har jeg valgt å se på den her. At de kan dele x på y og finne en konstant er nok ikke gjennomgått på dette trinnet i Norge. Dermed blir oppgaven vanskelig. I tillegg har oppgaven vanskelige tall, for eksempel k = $2\frac{1}{3}$. Over 20 % har svart henholdsvis B og C, flest C. Siden 6 er det dobbelte av 3 og 14 det dobbelte av 7 er ikke feilsvar B så merkelig. Valg av P = 10 i stedet for P = 15 kan tyde på manglende forståelse for at også denne verdien må sjekkes. Feilsvar C kan muligens forklares med en additiv tenkning. Forskjellen på 35 og 31 er 4, det samme som mellom 10 og 6.

Trendoppgave 12004, A4

12004, A4
På en bane kan Ida løpe 4 runder på samme tid som Mari løper 3 runder. Hvor mange runder har Ida løpt når Mari har løpt 12 runder?
A 9
B 11
C 13
D 16
Rett svar: D 16

Denne oppgaven har vært gitt begge år og kan sammenliknes direkte. I 1995 greide 58 % av de norske elevene oppgaven, dette var også det internasjonale snittet. I 2003 greide 52 % av elevene oppgaven, 2 prosentpoeng dårligere enn det internasjonale snittet dette året og altså 6 prosentpoeng færre enn i 1995. Vi ser en nedgang, men den er ikke så stor. Siden norske elevers problemer med denne type oppgaver ble påpekt i rapporter på 90-tallet (Brekke mfl. 1998) kunne man kanskje håpet at utviklingen var en annen.

Den vanligste feilen begge år (rundt 30 %) er at de tolker det slik at Ida hele tiden ligger en runde foran Mari og velger 13 som svar. De ser ikke på forholdet som multiplikativt, men som et fast tillegg på en runde. De to andre feilsvarene framkommer hvis de roter med hvem som løper raskest samtidig som de forstår at forholdet er en brøk (9 runder) eller holder på en fast runde foran (11 runder).

Konklusjon kategori proporsjoner/forhold

Elever læres opp til å se på multiplikasjon som gjentatt addisjon, og utvikler i følge forskning mangelfulle begreper rundt multiplikative strukturer (se kap.2.3.4). Undervisning i brøkregning konsentrerer seg ofte om brøk som del/hele. Brøk som uttrykk for forhold mellom to størrelser er vanskeligere og mange elever ser ikke ut til å ha forholdsbegrepet inne i åttendeklasse.

En vanlig feil mange elever gjør, er at de ser ut til å oppfatte en endring som et fast tillegg, altså additivt. Trendoppgaven over tester blant annet dette. I læreplanene nevnes det i L 97 at man i 7. klasse skal arbeide med brøk som ren tallstørrelse, del av en størrelse og som forhold mellom hele tall. I M 87 står det bare om regningsartene og om forkorting og utvidelse. Formlike trekanter, kart og arbeidstegninger trekkes inn på ungdomstrinnet.

Forståelse for proporsjonalitet er sentralt for videre arbeid med matematikk. Det er en sammenheng mellom multiplikativ tenkning og oppfatning av uttrykk som for eksempel 5x (se kap. 2.3.4) og andre deler av algebra, herav også funksjoner der endring er viktig (Smith 2003, se kap. 2.4.3).

Alle oppgavene er tekstoppgaver og krever ferdigheter i lesing og tolking av tekst. De må selv matematisere, det vil si finne løsningsmetode. Mange elever har en tendens til å skumme tekst, se på tallene og gjette framgangsmåte ut fra tallenes størrelse og måten de er oppgitt på (se kap. 2.3.7). Samtidig bruker nyere lærebøker tekstoppgaver i forbindelse med innføring av nye begreper, så man skulle kanskje tro at elever etter L 97 var noe bedre på dette enn elever etter M 87. Så ser ikke ut til å være tilfelle. Faren med bruk av kontekster, er at de kan knytte fremgangsmåten for nært opp til denne. De kan få for lite innsikt i løsningsstrategiens mulighet i andre settinger (se kap. 2.2.2).

5.2.2 Kategori Andeler

Oppgavene har til felles at de handler om brøk som del/hele (se kap. 2.3.4) Resultatene fra de to kategoriene *Andeler med halvkonkreter* og *Andeler med tekst* vil vise om vektleggingen i skolen på denne delen ved brøkbegrepet har hjulpet på forståelsen. I følge forskere, for eksempel Dörfler (2004, se kap. 2.3.4) er det en tendens til for sterk fokus på dette i skolen. I tillegg tester noen av oppgavene forståelse for likeverdige brøker. I den sammenheng trengs forståelse for brøk som kvotient, som tallstørrelse og som forholdet mellom to tall. Når andelen selv angis som en brøk, kan også operatorbegrepet (brøk som multiplikator) trekkes inn (se kap. 2.3.4).

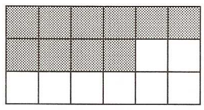
Tabell 5.2.2: Resultat kategori andeler med halvkonkreter

Oppgavenr	**Trend**	**År**	**Prosent rett Norge**	**Internasjonalt snitt**	**Differanse**
12001	Ja	2003	62	66	-4
22043		2003	69	75	-6
				Gjennomsnittsdifferanse	**-5**
A1	Ja	1995	59	67	-8
K1		1995	75	72	3
N19		1995	43	61	-18
F12		1995	62	59	3
H8		1995	77	80	-3
B9		1995	51	64	-14
				Gjennomsnittsdifferanse	**-5**
				Differanse mellom 2003 og 1995	**0**

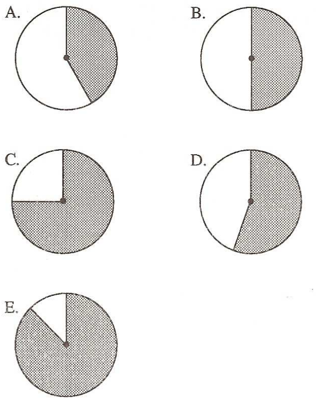
I denne kategorien ligger ikke norske elever så langt under det internasjonale snittet. Det har ikke skjedd noen endring på det mellom 1995 og 2003. Når det gjelder selve trendoppgaven har 3 prosentpoeng flere greid den i 2003 enn i 1995. Man skulle kanskje tro at disse oppgavene er så lette at enda flere skulle kunne greie dem. I to av oppgavene ligger norske elever over det internasjonale snittet i 1995, begge har med skyggelagte arealer å gjøre.

Oppgavene 22043 og K1

K1.



Hvilken sirkel har omtrent den samme brøkdelen skyggelagt som rektangelet ovenfor?



Rett svar: D

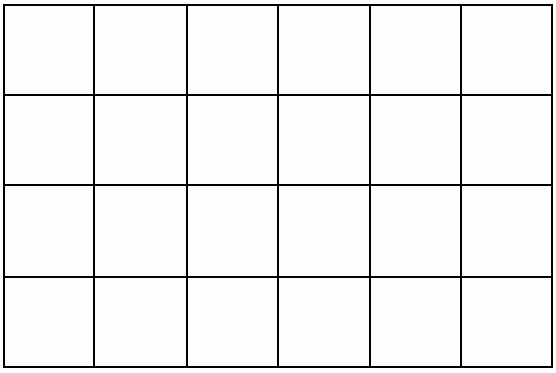
Oppgavene krever kunnskap om arealbegrepet, og om hva som menes med andel av hel figur. Ordet brøkdel brukes i K1. I 1995 var $\frac{10}{18}$ rett svar, litt over halvparten av sirkelen, mens det i 2003 var $\frac{5}{12}$, litt under halvparten. Elevene besvarer oppgaven 6 prosentpoeng dårligere i 2003. I begge tilfeller er de fleste feilsvar (ca 10 % i 95 og ca 15 % i 03) de sirklene som har hhv litt under halvparten(03) og litt over (95). Ordet brøkdel kan muligens forvirre noen, det samme gjelder areal. Siden oppgavene bruker ordet ”omtrent” kan noen av elevene ha tenkt at det ikke er så nøye med litt over eller under halvparten og svare feil selv om de på en måte har forstått oppgaveteksten. Et annet problem er å omgjøre en brøkbetegnelse som for eksempel $\frac{10}{18}$ til et tall de kan finne igjen på sirkelen. Forståelse for brøk som tall vil være nyttig her. Et annet poeng er at K1 er en av de få oppgavene i utvalget mitt hvor norske elever lå over det internasjonale snittet. Det er flere slike oppgaver i 1995 enn i 2003, kanskje skyldes det en oppgavetypetrend.

Oppgavene N19, F12, H8, B9

Alle oppgavene er fra 1995 og diskuteres fortløpende. De er også noe forskjellige fra hverandre.

N19

Skyggelegg (skraver) $\frac{5}{8}$ av smårutene på figuren.



Rett svar: 15 ruter skyggelegges

N19 er en oppgave hvor elevene får gitt et rektangulært rutesystem med 6 x 4 ruter og blir bedt om å skyggelegge $\frac{5}{8}$ av disse. Oppgaven krever i tillegg til andelsforståelse også forståelse for likeverdige brøker. Bare 43 % har fått poeng på den, langt under snittet internasjonalt. Sammen med B9 skiller den seg ut i så henseende i denne kategorien. Omtrent hver femte elev svarer fem ruter. Fem er telleren i brøken og det kan se ut som elevene leser oppgaven slik at det er fem ruter som skal skyggelegges uavhengig av nevneren. Antagelig får de problemer fordi det er flere enn åtte ruter i figuren. Samme problem ser vi også i tilhørende trendoppgave. Dette er et eksempel på mangelfullt brøkbegrep. I utgangspunktet skulle man kanskje tro at flere gjorde feil som lå nær korrekt svar, men det er ikke tilfelle her. Bare omtrent 9 % har svart fjorten eller seksten firkanter. Litt over 5 % har ikke besvart oppgaven.

B9 krever også kunnskap om likeverdige brøker og hvordan det kan illustreres i et rutesystem.

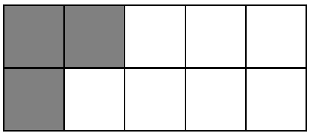
Bare halvparten av elevene greier denne, hele 14 prosentpoeng under det internasjonale snittet. Den høyeste feilprosenten (20 %) er alternativ D. Kanskje fordi det her er to av fem mørke rundinger.

F 12 er den andre oppgaven hvor norske elever ligger litt over det internasjonale snittet (se tabell 5.2.2). Oppgaven likner litt på 22043 og K1 i det den viser en sirkel som er skyggelagt. Her skal elevene selv angi mellom hvilke to gitte brøker brøkdelen skygge ligger. Her må de ha kjennskap. til hvordan brøk direkte brukes til å angi en del av et hele. De må også ha forståelse for intervall, hva det vil si at et tall ligger mellom to andre tall. Oppgaven har høy svarprosent, (98 %) og har sannsynligvis ikke vært oppfattet som spesielt vanskelig.

Feilsvarene ligger fordelt på mellom alternativet $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{2}$ på ca 17 % og mellom $\frac{3}{4}$ og 1 på ca. 16 %. Noe kan tyde på den første feilen skyldes at de har sett på den delen som ikke er skyggelagt. Den siste kan skyldes en unøyaktig oppfatning av $\frac{3}{4}$.

H8 Hele 77 % har rett svar. Oppgaven virker ikke i utgangspunktet å være lettere enn F12, men har vært det. Det kan bla a være fordi de slipper å plassere seg mellom to brøker Intervaller er vanskeligere å forstå som begrep enn et bestemt tall. Dessuten er figur E som viser rett svar veldig tydelig delt i tre med to skyggelagte felter. Flest feil er figur A, ca 8 %. Muligens skyldes det at to deler er skyggelagt og tre deler ikke er det.

Trendoppgave 12001 og A1



12001, A1

Hvor mange FLERE små kvadrater på figuren må skyggelegges for at 4/5 av de små kvadratene skal være skyggelagt?

A 5

B 4

C 3

D 2

E 1

Rett svar: A 5

Her er en oppgave hvor norske elever gjør det litt bedre i 03 enn i 95, også i forhold til det internasjonale snittet. En bedring på 4 prosentpoeng. Oppgaven krever at man forstår ordet ”flere” i tillegg til kunnskap om andeler og likeverdige brøker. Spørsmålet henviser ikke til rektanglet som sådan, men til de små kvadratiske rutene, noe som muligens kan forvirre noen. Her dukker altså igjen problemet fra N19 og B9 opp. Det er 10 små kvadrater, samtidig som 4 av 5 skal skyggelegges.

Rundt 60 % av de norske elevene greier oppgaven. Den største feilprosenten begge år er alternativ B, særlig høy var denne feilprosenten i 95 (ca 18 % mot ca 13 %). Sannsynligvis skyldes feilen at fire ruter tilsvarer telleren i brøken. Nest flest feilsvar er alternativ A, nevneren i brøken.

Konklusjon kategori

At noen av disse oppgavene (trend) har en positiv utvikling fra 95 til 03 kan kanskje skyldes L 97. Det er mulig at norske elever har sett flere slike oppgaver i de senere år siden det er blitt mer bruk av konkreter og halvkonkreter à la disse figurene som støtte i innarbeiding av nye begreper. Begrepet praktiske sammenhenger nevnes hele tiden i spesifiseringen av hovedmomenter i L 97. Svakheter viser seg spesielt i oppgaver der likeverdige brøker må forstås. I tillegg til å se brøk som en del av et hele, må de også se at oppdelingen kan være forskjellig og at samme mengde da kan angis ulikt (se kap. 2.3.3 og kap. 2.3.4). Selv om det er 10 ruter, kan vi snakke om femdeler fordi 5 er et multiplum av 10. Hvis det trenes lite på dette, vil ikke tegninger og bruk av konkreter i seg selv hjelpe. De må brukes med nettopp denne forståelsen for øye.

Flere matematikkdidaktikere skriver i sine artikler (se kap. 2.3.4) at for mange lærere legger for mye vekt på brøkbegrepet del av hele i arbeidet med brøk, og at mange elever ikke kommer lenger i sin forståelse for rasjonale tall. De danner et endelig brøkbegrep for tidlig og får dermed et særdeles mangelfullt brøkbegrep, noe resultatet i forrige kategori også kan tyde på.

Tabell 5.2.3: Resultat kategori andeler med tekstoppgaver

Oppgavenr	**Trend**	**År**	**Prosent rett Norge**	**Internasjonalt snitt**	**Differanse**
12041	Ja	2003	71	68	3
12027	Ja	2003	57	63	-7
32064		2003	33	42	-8
32570		2003	46	63	-18
32727		2003	45	58	-13
				Gjennomsnittsdifferanse	**-9**
G5	Ja	1995	72	66	6
E3	Ja	1995	62	65	-3
V3		1995	37	51	-15
R13		1995	31	38	-7
				Gjennomsnittsdifferanse	**-5**
				Differanse mellom 2003 og 1995	**-4**

Her er det fem oppgaver fra 2003 og fire fra 1995. Oppgavene tester noe av det samme som oppgavene ovenfor, med vekt på brøk som del av et hele. Oppgavene krever leseferdighet. Det er to trendoppgaver i denne kategorien. Har valgt å ta med to oppgaver hvor man tar en brøkdel av et helt tall siden ideen om brøk som andel av noe kan brukes i det tilfellet (jfr. hel figur). Her er brøk multiplikator, altså operatorbegrepet som er vektlagt i L 97 (Brekke mfl.1998). En brøkdel av en brøkdel er derimot vanskeligere å sannsynliggjøre på denne måten, det samme for et heltall ganget med en brøk selv om det er numerisk ekvivalent med brøkdel av helt tall. Tabell 5.2.3 viser at det er en endring i avstand til internasjonalt snitt. Det har økt sammenliknet med skyggeleggingsoppgavene.

Oppgavene 32064 og R13

R13

Lars hadde 360 kr. Han brukte $\frac{7}{9}$ av pengene. Hvor mye hadde han igjen?

Svar:____________________

Rett svar: 80 kr

Begge oppgavene løses ved å multiplisere en brøk med et helt tall, altså brøk som multiplikator. Du må etterpå trekke fra svaret du får fra oppgitt heltall. I 32064 slipper du å låne hvis du velger å bruke subtraksjonsalgoritmen, samtidig inngår multipler av både 7 og 8 her, mens 7 og 9 inngår i oppgave R13. Oppgavene er ikke flervalgsoppgaver. Det er liten forskjell på hvor mange prosent som har greid oppgavene de to årene og liten endring i avstand til internasjonalt snitt. De ligger noe lavere enn snittet her også. Det er relativt få som greier en slik oppgave på 8.trinn. Multiplikasjon av brøk med helt tall skal det i følge læreplanene være arbeidet med. Operatorbegrepet er spesielt vektlagt i L 97. Spørsmålet er om de skjønner av oppgaveteksten at det er det de må gjøre. Den største svarprosenten for begge oppgavene er ”Andre gale svar”, nesten 40 % begge år.

Oppgavene 32727 og V3

32727

Tre brødre, Bjørn, Dag og Markus, mottar en gave på 45 000 zed fra faren sin. Brødrene deler pengene mellom seg i forhold til hvor mange barn hver av dem har. Bjørn har 2 barn, Dag har 3 barn og Markus har 4 barn. Hvor mange zed vil Markus få?

A 5000

B 10 000

C 15 000

D 20 000

Rett svar: D 20 000

V3

For å lage maling av en spesiell farge, blander Arne 5 liter rød, 2 liter blå og 2 liter gul maling. Hva er forholdet mellom volumet av rødmalingen og volumet av hele blandingen?

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{5}{9}$

Rett svar: D 5/9

Oppgavene er noe forskjellige, V3 ligner i stor grad på trendoppgave 12041, du må riktignok summere tre tall i stedet for to for å finne det hele. Oppgaven var plassert under proporsjoner i 1995. I 32727 må du også summere tre tall for å finne nevner/divisor, men her får du en uekte brøk til svar (når du har ganget med 45000) og mange vil sannsynligvis ikke tenke brøk her i det hele tatt. Dette er heller ingen ”ordentlig” andelsoppgave. I denne oppgaven må du gange tallet du får med fire, alternativt ta 4/9 av tallet 45000. I V3 er tallene så små at de bare kan ”leses” av. Til tross for at oppgave32727 virker vanskeligere, har flere greid denne oppgaven enn V3. Muligens fordi de kan slippe å tenke brøk. Avstanden til det internasjonale snittet er hhv 13 prosentpoeng og 15 prosentpoeng, størst i 95. En stor gruppe elever, nesten 40 % svarer $\frac{5}{4}$, noe som betyr at de ikke har summert alle tre fargene for å få nevner. Det er mulig de tenker noe av det samme her som de som har foreslått alternativ A. i H8. Fem deler rød og fire deler til sammen av rød og gul. At en andel av noe kan være større enn en i en slik sammenheng, viser mangelfulle begreper.

I 32727 er det hyppigste feilsvaret 15000 kr noe som kan tyde på at de har delt arven direkte på tre og ikke tatt hensyn til ulik fordeling.

Oppgave 32570

Dette er den eneste prosentoppgaven jeg har tatt med. Den likner litt på R13 og 32064. I tillegg må eleven vite at prosent er andel av 100. Oppgaven er en flervalgsoppgave hvor svarforslagene er gitt delvis som desimaltall. 46 % greide den, hele 17 % lavere enn det internasjonale snittet. Oppgaven er en enkel tekstoppgave. Hele 30 % av elevene svarer 3 %, altså teller i brøken. De kjenner tydeligvis ikke prosentbegrepet godt ennå.

1. Trendoppgave 12041 og G5

12041, G5

I en klasse har 16 elever fødselsdag i første halvdel av året, og 14 har fødselsdag i andre halvdel av året. Hvor stor del av klassen har fødselsdag i første halvdel av året?

A. $\frac{30}{14}$

B. $\frac{16}{14}$

C. $\frac{14}{16}$

D. $\frac{30}{16}$

E. $\frac{16}{30}$

Rett svar: E 16/30

Oppgaven krever at du summerer totalt antall elever før du setter opp andelen som har bursdag 1. halvår. Oppgaven er likt besvart i 95 og 03. Avstanden til det internasjonale snittet som for denne oppgaves vedkommende ligger lavere enn det norske resultatet, har blitt litt mindre, fra 6 prosentpoeng til 3 prosentpoeng. Oppgaven krever litt finlesing. Den vanligste feilen som gjøres er alternativ B. Igjen samme misoppfatning som vi ser i H8 og V3. Delene (teller og nevner) ses hver for seg.

2. Trendoppgave 12027 og E3

12027, E3

Hvor stor del av en time er gått mellom klokka 1.10 og 1.30?

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

E. $\frac{3}{4}$

Rett svar: B 1/3

Oppgaven krever at de kan klokka og skjønner hvor mange minutter det er mellom kl.1.10 og kl. 1.30. I tillegg må du vite hvor mange minutter det er i en time. Andel av time er forkortet i svaralternativene. Enten bruker du brøkregning, men jeg vil tro at mange rent intuitivt vet at 20 minutter er en tredjedels time. Oppgaven var noe bedre besvart i 1995 enn i 2003, hhv 62 % og 57 %. Avstanden til det internasjonale snittet har også økt noe, fra -3 prosentpoeng til -7 prosentpoeng. Det er mulig at økt bruk av klokke på mobilen hvor urskiven ikke vises, kan være en forklaring her.

At alternativ A er det vanligste feilsvaret, ca 15 % i 1995 og ca 13 % i 03 kan tyde på at de deler 20 på 100 og ikke på 60.

Konklusjon kategori

Dette er oppgaver som krever kunnskaper om flere av aspektene ved brøk, blant annet å multiplisere brøk med helt tall, summere tall før du har nevneren/divisor og bruke en av leddene i summen som teller i brøken og å se brøk som ett tall, ikke to. Oppgavene krever evnen til å matematisere (se kap. 2.4.3 og kap. 2.3.7) ut fra en tekst. Gjennomsnittlig avstand til det internasjonale snittet er relativt likt for begge andelskategorier. Også internasjonalt har tekstoppgavene vært vanskeligst, og en negativ trend kan ses hos de norske her fra 95 til 03. Dette tyder på at tekst ikke er til så god hjelp som en tegning.

5.2.3 Kategori plassering på tallinje, overslag

Kategorien omhandler rasjonale tall, deres tallverdi og sammenligning av tallverdier, kunnskap om at de kan angis på flere måter; som brøk (ekte og uekte), blandet tall, desimaltall, omgjøring mellom disse. Noen av oppgavene er om plassverdisystemet, spesielt desimaltall. Avrundingsoppgaver er også med i denne kategorien

__Tabell 5.2.4: Resultater kategori plassering på tallinje, overslag__

Oppgavenr	Trend	År	Prosent rett Norge	Internasjonalt snitt	Differanse
12016	Ja	2003	51	56	-5
22198		2003	35	53	-18
22104		2003	73	76	-3
32670		2003	91	88	3
22012		2003	65	68	-3
22144		2003	33	55	-22
32725		2003	16	35	-19
				Gjennomsnittsdifferanse	**-10**
C4	Ja	1995	52	58	-6
D9		1995	76	75	1
B10		1995	65	54	11
F9		1995	69	70	-1
I6		1995	84	78	6
M4		1995	39	46	-7
N14		1995	63	73	-10
P16		1995	17	47	-29
Q8		1995	55	46	8
L9		1995	78	85	-8
N11		1995	91	84	7
O4		1995	39	50	-12
				Gjennomsnittsdifferanse	**-3**
				Differanse mellom 2003 og 1995	**-6**

Totalt sett presterer de norske elevene dårligere i 2003 enn i 1995, hvor de ikke lå noe særlig under det internasjonale gjennomsnittet. På trendoppgaven gjør de det i 2003 litt bedre sammenliknet med internasjonalt snitt. I oppgaver med desimaltall og overgangen fra desimaltall til brøk gjør de det noe dårligere i 03 enn i 95. I rene brøkoppgaver er det ikke så stor forskjell med unntak av oppgaver hvor de selv skal skrive en brøk som er større enn eller mindre enn en annen.

Brøkoppgaver.

Oppgavene 22104 ,D9, M4

M4

Hvilket av tallene er størst?

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{7}{10}$

Rett svar: A 4/5

Her er det relativt lik ordlyd i spørsmålsstillingen. I D9 er brøkene mer ”familiære” med nevner 2, 3 og 6. I 22104 og D9 testes kunnskap om forhold mellom teller og nevner og dets betydning for en brøks størrelse mer direkte siden tre av brøkene har samme teller. D9 har norske elever besvart som det internasjonale snittet, mens 22104 ligger 3 prosentpoeng under. Begge oppgavene har høy svarprosent, nesten 99 %. Vanligste feil for disse to er begge år $\frac{1}{2}$, (16 – 17 %). Dette kan skyldes to ting, det er den minste nevneren, dessuten er det en brøk de kan og har et forhold til. Den største brøken kommer begge år på tredjeplass når det gjelder svarprosent (ca. 7 %).

M4 er betydelig dårligere besvart enn de to andre, 39 % har rett svar, 7 prosentpoeng under snittet på oppgaven internasjonalt. Oppgavens fire alternativer er relativt nær hverandre i tallverdi, slik at uten trening i å bedømme dette, er det fort gjort å gjøre feil. Kunnskap om hvordan du kan beregne det ved å dele teller på nevner eller finne fellesnevner er nødvendig. Flest feilsvar ligger da også på nest største brøk (30 %) og så på tredje størst (26 %). De siste kan ha sett på teller og nevner som selvstendige tall og valgt det største tallet, med nevner 10.

Det er tre oppgaver til som omhandler brøkers tallverdi.

Oppgavene 22012, I6, og N14

22012

Skriv en brøk som er mindre enn $\frac{4}{9}$.

Svar:_________________

I6

Skriv en brøk som er større enn $\frac{2}{7}$.

Svar:____________________

N14

I hvilken rekke av brøker er alle tre brøkene like store?

A. $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{12}{14}$

B. $\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{9}{15}$

C. $\frac{3}{8}, \frac{6}{16}, \frac{12}{32}$

D. $\frac{5}{10}, \frac{10}{15}, \frac{1}{2}$

Rett svar: C 3/8, 6/16, 12/32

22012 og I6 handler tilsynelatende om det samme, å skrive en brøk som er hhv større enn og mindre enn en oppgitt brøk. Mens nærmere 85 % greide I6, 6 prosentpoeng høyere enn det internasjonale snittet, var det bare nærmere 65 % som greide 22012 , 3 prosentpoeng under internasjonalt snitt. Brøken i I6 er ikke mer familiær enn den som brukes i 22012. Det er så langt jeg kan se ingenting i fagplanene som tyder på at størrelsesforhold mellom brøker er tonet ned i L 97 i forhold til M 87. Den negative utviklingen er dermed vanskelig å forklare. Hvis tallforståelse generelt er blitt dårligere, vil det slå ut på denne typen oppgaver også.

I N14 skal elevene sammenlikne grupper på tre og tre brøker og si hvilken som består av like store brøker. 63 % har greid denne oppgaven, lavt sammenliknet med det internasjonale snittet. Her må du kunne forkorte/ utvide brøker. Flest feilsvar er alternativ D som det nok er fort gjort å lese feil (at alle tre har tallverdi 0,5).

Desimaltallsoppgaver

Elevene prøves i plassverdisystemet, de må kunne forskjellen mellom for eksempel tideler og hundredeler. De må også kunne relative størrelsesforhold mellom desimaltall samt avrunding til nærmeste tidel eller hundredel. De må kunne regne om fra desimaltall til brøk og vice versa. Hvis elevene deler desimaltall i to og leser desimalene som egne tall, vil de få problemer.

Oppgave 22144 og O4

22144
Hva er 78,2437 avrundet til nærmeste hundredel?
A 100
B 80
C 78,2
D 78,24
E 78,244
Rett svar: D 78,24

O4
Hvilket av tallene nedenfor får vi hvis vi runder av 89,0638 til nærmeste hundredel?
A 100
B 90
C 89,1
D 89,06
E 89,064
Rett svar: D 89,06

I begge tilfeller er tredje siffer bak komma lavere enn fem, mens fjerde siffer er høyere enn fem. De må altså vite hvilket siffer som teller når man opphøyer eller ikke. I tillegg må de vite hvor hundredelsplassen er. O4 er korrekt besvart av 39 %, 12 prosentpoeng lavere enn det internasjonale snittet, mens 22144 er korrekt besvart av 33 %, hele 22 prosentpoeng lavere enn det internasjonale snitt.. I begge tilfellene har nesten 30 % svart feilalternativet med tre desimaler, noe som tyder på at disse ser desimalene for seg og leser hundredel som tre siffer en misforståelse som kan stamme fra det de er vant til med heltall. En merkbar forskjell på de to årene, er at det er 10 prosentpoeng flere som har foreslått 100 som svaralternativ i 2003 (hele 18 %) i forhold til 1995. Det kan tyde på at de har oversett hundre*del* og tolket det dit at de skal avrunde til nærmeste 100. Kanskje øves det en del på avrunding til nærmeste tierpotens slik at de forventer at det er det det spørres etter.

Oppgave 32670

32670

Hvilket av disse tallene er nærmest 10?

A 0,10

B 9,99

C 10,10

D 10,90

Rett svar: B 9,99

Oppgaven likner litt på de to foregående. Hele 91 % får den til, og her ligger de litt over snittet internasjonalt. Det kan muligens være en sammenheng her med den hyppigste feilen som ble gjort i 22144, som kan tyde på at elevene i undersøkelsen er vant til å runde av til nærmeste 10, 100 osv. Ingen feilsvar utmerker seg her.

Oppgavene 22198, B10, Q8, F9

22198

I hvilken rad er tallene ordnet i rekkefølge fra det største til det minste?

A. 0,233; 0,3; 0,32; 0,332

B. 0,3; 0,32; 0,332; 0,233

C. 0,32; 0,233; 0,332; 0,3

D. 0,332; 0,32; 0,3; 0,233

Rett svar: D 0.332; 0,32; 0,3; 0,233

Q8

Hvilken rekke av tall er ordnet i rekkefølge fra det minste til det største?

A. 0,345 0,19 0,8 $\frac{1}{5}$

B. 0,19 $\frac{1}{5}$ 0,345 0,8

C. 0,8 0,19 $\frac{1}{5}$ 0,345

D. $\frac{1}{5}$ 0,8 0,345 0,19

Rett svar: B 0,19 $\frac{1}{5}$ 0,345 0,8

Disse oppgavene omhandler på ulike måter plassering av desimaltall etter størrelse. I den ene oppgaven er det en kombinasjon av brøk og desimaltall som i trendoppgaven (se nedenfor).

Q8 som ble gitt i 95 har tilsvarende ordlyd med **22198** , men her er det kun med desimaltall. De samme fire tall er stokket på fire ulike måter. I 22198 er tallene plassert nærmere hverandre rent layoutmessig og det kan faktisk være litt vanskelig å lese dem atskilt. 35% har greid oppgave 22198, 18 prosentpoeng under internasjonalt snitt. Vanlig feilsvar er alternativ A hvor tallene er satt opp fra minste til største. Dette kan med andre ord skyldes feil oppfatning av spørsmålet. Alternativ B er også vanlig feilsvar, her kan det se ut som de bare ser på tidelen og tror at 0,3 er større enn 0,32. Q8 er vesentlig bedre besvart, den er layoutmessig mer oversiktelig og har desimaltall med ulike siffer allerede på tidelsplassen.. Samtidig er det med en brøk som kan vanskeliggjøre oppgaven, det vil si hvis de prøver å sammenlikne desimaltall og brøk og dermed trenger den kunnskapen i tillegg. Oppgaven kan løses ved kun å se på rekkefølgen på desimaltallene og eliminere tre av alternativene på den måten. De norske elevene svarer 8 prosentpoeng bedre enn det internasjonale snittet og 55 % greier den. En forskjell i avstand til det internasjonale snittet på 25 prosentpoeng mellom 22198 og Q 8 er vanskelig å forklare. Internasjonalt er 22198 bedre besvart enn Q8.

Feilsvarene på Q8, rundt 20 % hver, ligger fordelt på misforståelser knyttet til antall desimaler, enten dess flere, dess mindre tall (alternativ A) eller dess færre, dess mindre tall (alternativ C).

B10: Norske elever svarer bedre enn det internasjonale snittet her. Feilsvarene (rundt 17 % hver) som forekommer er alternativene A og D, de to største tallene. Det kan skyldes delvis en misforståelse som er knyttet til at tall som inneholder tusendeler er minst siden tusendeler er mindre enn hundredeler, dels at de leser desimaler atskilt fra resten av tallet og oppfatter at tall med en desimal er mindre en de med flere.

F9: Oppgaven er ikke så godt besvart som den foregående sett i forhold til det internasjonale snittet. For norske elever har disse to oppgavene hatt relativ lik vanskelighetsgrad. Kunnskap om posisjonssystemet kreves også her, de fleste feil er alternativ D, som er ti ganger for stort (14 %).

Oppgavene N11 og L9

N11

I en avis sto det at omtrent 18 200 trær var plantet i en skog. Tallet var avrundet til nærmeste hundre. Hvilket av disse tallene kunne ha vært det nøyaktige antall trær som var plantet?

A. 18 043

B. 18 189

C. 18 289

D. 18 328

Rett svar: B 18189

L9

Hvilket av tallene er fem hundre og fire og sju tideler?

A 54,7

B 504,7

C 547

D 5004,7

Rett svar: B 504,7

Begge tester kunnskaper om plassverdisystemet. I L9 skal de oversette fra norsk språk til tallsymboler. N11 vrir på de tradisjonelle avrundingsoppgavene. N11 er meget godt besvart av de norske elevene, det kan se ut til at disse elevene har god trening i avrunding av hele tall. L9 er dårligere besvart også sett i sammenheng med det internasjonale snittet. Det kan nok komme av at vi sjelden leser desimaltall som tideler, hundredeler osv, vi sier for eksempel 0,6, ikke 6 tideler. En del (ca 14 %) forstår tideler som enerplassen her (alternativ C), sannsynligvis overser de det siste ordet og leser tallene etter hverandre..

Oppgavene 32725 og P16

P16

Skriv 0,28 som brøk. Forkort brøken mest mulig.

Svar: ______________________________

Rett svar: 28/100 = 7/25

Omtrent lik prosent norske elever (16 – 17 %) greide poeng på disse to oppgavene, men vi er 9 prosentpoeng nærmere det internasjonale snittet i 32725. I begge tilfeller ligger elevene langt under dette snittet. P16 er den dårligst besvarte oppgaven i denne kategorien.

Her må elevene kunne sammenhengen mellom brøk og desimaltall, at det er flere måter å uttrykke samme tall på. De må kunne plassverdisystemet og kjenne prosedyrene for å regne om. En del greier ikke å forkorte $\frac{28}{100}$, 10 % har rett svar på det som bare tester overgangen mellom desimaltall og brøk. Å gå fra brøk til desimaltall besvares korrekt av bare 16 % i 2003. Selve divisjonen er vanskelig for dem som får oppgaven i den delen av heftet hvor kalkulator ikke er tillatt. Dette går nok på manglende erfaring med denne type problemstillinger og generelt dårlige kunnskaper om plassverdisystem og rasjonale tall hos mange norske elever.

Trendoppgave 12016 og C4

12016, C4 For hvilket av disse tallparene er 2,25 større enn det første tallet, men mindre enn det andre tallet? A. 1 og 2 B. 2 og $\frac{5}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ og $\frac{11}{4}$ D. $\frac{11}{4}$ og 3 Rett svar: B 2 og 5/2

Oppgaven krever kunnskap om sammenheng mellom heltall, brøk og desimaltall og relative størrelsesforhold mellom tall. Det er så å si ingen forskjell på hvor mange prosent av våre elever som greide denne i 95 og 03, vi er et prosentpoeng nærmere det internasjonale snittet i 03 enn i 95. Halvparten av elevene har altså greid oppgaven begge år. Den vanligste feilen (ca 20 %) er også den samme, alternativ C. Begge år foreslår ca 12 % alternativ D. Det spesielle med denne trendoppgaven at resultatene er så like de to årene. Kunnskapen om desimaltall ser ellers ut til å ha blitt dårligere, mens brøkkunnskapene står på stedet hvil. En forklaring på at det er likt i denne oppgaven kan være at 2,25 er ”familiært”, det samme er brøken $\frac{5}{2}$.

Konklusjon kategori

Gjennomsnittlig avstand til det internasjonale snitt har økt med 6 prosentpoeng. I 1995 lå norske elever like under dette snittet, så utviklingen går ”den gale veien”. Man kunne ønsket en forbedring i stedet for en ytterligere nedgang. At forståelsen for desimaltall viser en klarere negativ trend enn brøk, synes underlig all den tid kalkulatorbruken har økt. Her regnes det med desimaltall i stedet for brøk. Samtidig kan bruken av kalkulator muligens sløve elevene i forhold til desimalenes plassering og svekke kunnskaper om plassverdisystemet generelt.

5.2.4 Kategori tallregning

Oppgavene her er nokså forskjellige, jeg har valgt å gruppere etter heltall, brøk og desimaltall. Fokus er på addisjon og subtraksjon for alle tre grupper. I tillegg kommer da naturligvis forståelse for plassverdisystemet, siden det har betydning for regning med heltall og desimaltall. I forbindelse med brøkregning, kreves kunnskaper om bruk av felles nevner ved addisjon og subtraksjon. Oppgavene tester ikke forståelse for hvorfor felles nevner er nødvendig, bare prosedyrekunnskap. En slik forståelse krever en god oversikt over brøkers forskjellige underbegreper og sammenhenger mellom disse (se kap. 2.3.4) og vil selvsagt forsterke prosedyrekunnskap.

Tabell 5.2.5: Resultat tallregning, addisjon og subtraksjon av heltall, desimaltall og brøk

Oppgavenr	**Trend**	**År**	**Prosent rett Norge**	**Internasjonalt snitt**	**Differanse**
12028	Ja H	2003	45	71	-26
22010	D	2003	46	71	-25
22046	D	2003	45	68	-23
32416	B	2003	11	38	-27
32094	B	2003	43	67	-24
22066	B	2003	19	59	-41
				Gjennomsnittsdifferanse	**-28**
E4	Ja H	1995	50	73	-23
C6	H	1995	75	75	0
H9	H	1995	90	88	2
R12	H	1995	87	87	0
I5	D	1995	72	76	-4
R6	D	1995	75	75	1
K9	B	1995	38	60	-22
L17	B	1995	36	60	-24
				Gjennomsnittsdifferanse	**-9**
				Differanse mellom 2003 og 1995	**-19**

I Tabell 5.2.5 har jeg i andre kolonne valgt å legge inn opplysninger om hvorvidt man regner med heltall (H), desimaltall (D) eller brøk (B). Det er størst nedgang i denne kategorien, fra 9 prosentpoeng under det internasjonale snittet i 1995 til 28 prosentpoeng i 2003, en endring på hele 19 prosentpoeng. Ytterligere oppsplitting viser størst nedgang når det gjelder desimaltall og heltall. For underkategorien heltall er det for få oppgaver i 03 til å si noe særlig, så tallene må ses i lys av det. Brøkregning lå godt under internasjonalt snitt også i 1995.

Heltall

Det er fem oppgaver, kun en av dem er fra 2003, og det er en trendoppgave.

Trendoppgave 12028, E4

9	1	4	5

De fire sifrene over skal skrives etter hverandre fra det største til det minste så de danner et firesifret tall. De samme fire sifrene skal så skrives etter hverandre fra det minste til det største som et annet firesifret tall. Hva er differensen mellom disse to firesifrede tallene?

A 3726

B 4726

C 8082

D 8182

E 8192

Rett svar: C 8082

Oppgaven er dårlig besvart av de norske elevene sammenliknet med internasjonalt snitt begge år, tre prosentpoeng dårligere i 03. Oppgaven krever kunnskap om plassverdi i tillegg til subtraksjon av firesifrede, hele tall. Du må låne hvis du velger å bruke standardalgoritmen. Svarforslagene kan alternativt sjekkes ved addisjon. Det forutsetter at man har greid å sette tallene i korrekt rekkefølge først. I 1995 greide 50 % av de norske elevene denne oppgaven, i 2003 45 %. De greier ikke første del, å sette sifrene i henholdsvis stigende og synkende rekkefølge. De beholder tallet med sifrene i den rekkefølge det står og snur disse før de trekker fra. Alternativ A og B er varianter av dette. Begge år er vanligste feil alternativ B, ca 16 % gjør denne feilen. Oppgaven har muligens også en opplysning "for mye" for elevene, de forstår ikke at de skal stokke om på sifrene to ganger. Nest vanligste feil i 03 er alternativ D og har sannsynligvis sammenheng med selve subtraksjonen.

Oppgave R12

R12
Regn ut:
6000
- 2369
A. 4369
B. 3742
C. 3631
D. 3531
Rett svar: C 3631

I 95 ble det altså gitt en ren subtraksjonsoppgave. Dette greide 87 % av elevene, det samme internasjonalt. Addisjon er en mulig strategi her (jfr. Fuson 2003, kap. 2.3.7). Hoderegning er også enklere når det ene tallet er rundt. Ingen spesielle feil utmerker seg. Oppgaven har høy svarprosent. Ferdigoppstilte oppgaver av denne typen er nok elevene vant med, men det er muligens mindre vektlagt etter L 97, i alle fall hvis vi ser på læreplanen. Det kunne derfor vært interessant å ha sett hvordan en tilsvarende oppgave ble besvart i 2003.

Oppgavene C6 og H9

Dette er to oppgaver fra 95 med sum av hele tall. Her er overslagsregnig et viktig poeng. H9 er bedre besvart enn C6, det har vært lettere å finne beste overslag. Begge ligger nær det internasjonale snittet for oppgavene og oppgavene er relativt lette. I C6 har ca 10 % svart det beste overslaget (alternativ C) i stedet for det dårligste, muligens en lesefeil.

Brøk

Oppgavene 32094, 32416, 22066, L17, K9

L17

Hva er $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$?

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{5}{12}$

E. $\frac{1}{2}$

Rett svar: B 1/3

K9

$\frac{3}{4}+\frac{8}{3}+\frac{11}{8}=$

A $\frac{22}{15}$

B $\frac{43}{24}$

C $\frac{91}{24}$

D $\frac{115}{24}$

Rett svar: D $\frac{115}{24}$

Oppgavene går ut på addisjon og subtraksjon av brøker med ulik nevner. Alle utmerker seg med at avstanden (negativ) til det internasjonale snittet er på over 20 prosentpoeng, for 22066 helt opp i 41 prosentpoeng.

Oppgave **32094** skiller seg ut ved at nevnerne er potenser av 10, og at det dermed er lett å regne om til desimaltall og summere den veien. Dette forsterkes av at oppgaven har svarene angitt som desimaltall. Dette har gjort oppgaven enklere enn de rene brøkregneoppgavene dette året, kan det se ut til. Samtidig er avstanden til det internasjonale snittet svært stor også her. Vanligste feil er alternativ B. Tanken kan være at desimalene sees på som et egne tall og at hundredel pluss tusendel må bli mer enn 1000. Mellom 25 % og 30 % gjør denne feilen.

32416 og **L17** handler om subtraksjon. Brøkene i 32416 er enkle, kjente brøker. Oppgaven er meget dårlig besvart, kun 11 % av elevene greier den. 40 % av elevene tipper på alternativ A: ”trekk teller fra teller og nevner fra nevner”. 30 % trekker nevnerne fra hverandre og lar telleren, som for begge brøker er 1, stå, altså alternativ B. Rundt 16 % foreslår alternativ C, disse har nok noe mer kunnskap om emnet og ser at de trenger felles nevner.

L17 har tre familiære brøker med ulike nevnere. Her må elevene regne selv for å komme fram til svaret og sånn sett burde den være vanskeligere enn 32416, men både norske og internasjonale resultater viser det motsatte. Sannsynligvis lar de seg lure av regneforslagene i 32416. Alternativ A ser tilforlatelig ut. Norske elever ligger like langt under det internasjonale snittet på L17, 36 % har greid denne oppgaven, hvor de også må kunne forkorte brøken de får til svar. Den vanligste feilen er alternativ D (ca 34 %) som er nært rett svar, det er fort gjort å glemme å trekke fra den siste eneren, svaret har korrekt nevner. Hvis denne tolkningen er rett, kan utviklingen når det gjelder å subtrahere brøker synes ganske så negativ. Arbeid med denne typen oppgaver er også nedtonet i læreplanene (Brekke mfl. 1998).

22066 og K9 er to oppgaver som likner hverandre. Resultatet bekrefter antagelsen min over, 38 % greide oppgaven i 95, 22 prosentpoeng under internasjonalt snitt, mens 19 % greide 22066, hele 41 prosentpoeng under det internasjonale snittet. Teller pluss teller pluss teller delt på nevner pluss nevner pluss nevner er den hyppigst foreslåtte feilen her også, ca 42 % i 95, ca 55 % i 03. Hvis elevene både mangler forståelse for addisjon av brøk og forholder seg til regler som dertil er dårlig innarbeidet, er det lett å blande inn multiplikasjonsregelen her.

Desimaltall

Oppgavene 22010,22046,I5,R6

22010

Alice løp en strekning på 49,86 sekunder. Beate løp den samme strekningen på 52,30 sekunder. Hvor mye lengre tid enn Alice brukte

Beate?

A 2,44 sekunder

B 2,54 sekunder

C 3,56 sekunder

D 3,76 sekunder

Rett svar: A 2,44 sekunder

R6

Regn ut: 2,201 – 0,753

A 1,448

B 1,458

C 1,548

D 1,558

Rett svar: A 1,448

Alle fire oppgaver leder til addisjon eller subtraksjon av desimaltall.

I5 og **R6:** Over70 % av de norske elevene greide disse to oppgavene i 1995, nær opp til det internasjonale snittet. I slike flervalgsoppgaver kan du ta utgangspunkt i svaret og addere med det tallet du trakk fra, slik at noen direkte test av kunnskap om subtraksjon i hodet eller på papir er det nødvendigvis ikke. Hvis du anvender subtraksjonsalgoritmen, må du låne flere ganger i begge tilfeller. I5 er lettere å ta i hodet enn R6, både pga av avstand mellom tallene og antall desimaler, men R6 er litt bedre besvart. Muligens kan det skyldes at oppgaven er ferdigoppstilt, du slipper å matematisere fra en tekst.

Feilsvar er relativt jevnt fordelt mellom C og D i I5 (begge kan være typiske hoderegningsfeil) og mellom B og C i R6 (glemmer at når du låner fra 0, stryker du en tier, eller stryker tieren på feil desimal).

22010 og 22046: Mer oppsiktsvekkende er det at oppgavene fra 2003 er så dårlig besvart. Tabell 5.2.5 viser bare 45 % av de norske oppnår poeng på disse mot rundt 70 % internasjonalt. Selv om begge er tekstoppgaver og den ene er en addisjonsoppgave tyder dette på at regning med desimaltall er blitt vanskelig for åttendeklassinger anno 2003. I 22046 er det ulikt antall desimaler, noe som forvansker oppgaven. 22010 ligner veldig på I5, både når det gjelder kontekst fra idrettsbanen og at det er relativt lett å bruke hoderegning eller addisjon av foreslåtte svar som strategi En viktig forskjell er at 22010 handler om sekunder. Det kan tenkes å forvirre, siden klokka delvis er et sekstitallsystem. At dette alene kan forklare at elevene ligger 20 prosentpoeng lavere enn det internasjonale snittet her, når de lå like under i 1995 er lite trolig. Klokkeproblemet er dessuten internasjonalt. Nesten hver tredje elev har svart alternativ C, som tyder på at de har sett desimalene for seg, regnet avstanden mellom dem og så heltallsdelen for seg. Dette kan tyde på at de har forsøkt seg på en hoderegningsstrategi uten gode nok kunnskaper om desimaltall.

Konklusjon kategori

Regning er ikke norske åttendeklassingers sterke side hvis man skal tro på disse resultatene. Det er lite testing på heltallsregning her, så det er umulig å si noe nærmere om dette emnet. Trendoppgaven tester som nevnt også plassverdi og sifrenes betydning for et talls størrelse, men dette henger selvsagt nært sammen med tallregning, enten man regner med hodet eller ved hjelp av en skriftlig algoritme. Det er betenkelig at vi ligger 25 prosentpoeng under internasjonalt snitt på denne.

Meget tydelig er også mangelen på regneferdigheter i områdene brøk og desimaltall. I brøkregning ser det ut til at elevene presenteres for regler uten vekt på forståelse, samtidig som disse reglene innlæres for dårlig. Det er gjerne en sammenheng her. Har ikke reglene mening, glemmes de lettere. Det at de legger sammen tellerne for seg og nevnerne for seg, kan stamme fra multiplikasjon med brøk. Jeg vil anta at de fleste norske åttendeklassinger vet at to halvparter ikke blir en halvpart, men at de ikke ser sammenhengen mellom brøkregning og virkeligheten rundt seg. Brøkoppgavene som er gitt her, er tatt ut av enhver kontekst og det kan selvsagt diskuteres og kritiseres. Riktignok er arbeid med de fire regningsarter knyttet til brøk mål /emner både i L 97 og M 87 på 8. trinn. L 97 vektlegger formell regning av ferdigoppstilte stykker i enda mindre grad enn M 87, så elevene har sannsynligvis liten trening i dette (se kap. 3.2.4). På den annen side vil mange mene at ferdighetstrening er nødvendig.

Regning med desimaltall er det området hvor endringen fra 1995 til 2003 har vært størst, hele 22 prosentpoeng mot 8 prosentpoeng for brøk. Overfladisk og hyppig bruk av kalkulator kan være en forklaring her. Elevene i 95 fikk ikke bruke kalkulator i TIMSS og svarer i elevspørreskjemaet at de bruker det i undervisningen i mindre grad enn det de svarer åtte år senere (se kap. 5.5.4). L 97 åpner da også for kalkulatorbruk allerede i 2. klasse på barnetrinnet (se kap. 3.2.4). Brøkregning trenes det noe på uten kalkulator siden de foreløpig ikke har innført bruk av kalkulatorer med brøkregningsprogram for grunnskolen. Det ser ut til at de har prøvd seg på hoderegning i en del tilfeller, men at tallforståelsen er for dårlig.

5.3 Algebraoppgaver

I vedlegget finnes tabell som viser oversikt over hvilke kunnskaper som trengs for å løse de ulike oppgaver. Se tabell 5.4 i Appendiks.

5.3.1 Kategori ligninger av første grad med en ukjent

Oppgavene omfatter i hovedsak ferdigoppstilte ligninger og formler. Selv om det i prinsippet er det samme, vil det oppfattes annerledes når det er flere bokstaver med. To av oppgavene handler om å balansere murstein eller metall slik at likevekt oppstår. Disse kunne for så vidt vært sett på som en gruppe for seg, men siden disse er nært knyttet til undervisning i ligninger, har jeg valgt å ta de med her.

Tabell 5.3.1: Resultater i kategorien ligninger av første grad med en ukjent

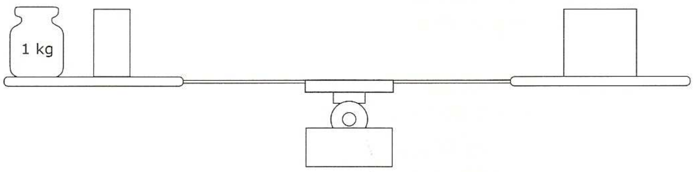
Oppgvenr	**Trend**	**År**	**Prosent rett Norge**	**Internasjonalt snitt**	**Differanse**
12002	Ja	2003	66	76	-10
32424		2003	58	60	-2
12040	Ja	2003	59	77	-19
22253		2003	11	60	-50
32540		2003	43	69	-26
32210		2003	22	48	-26
				Gjennomsnittsdifferanse	**-22**
A2	ja	1995	76	79	-3
G4	Ja	1995	62	76	-14
L16		1995	39	54	-15
O7		1995	52	78	-26
Q7		1995	53	72	-19
				Gjennomsnittsdifferanse	**-15**
				Differanse mellom 2003 og 1995	**-7**

Norske elever lå i gjennomsnitt 15 prosentpoeng under det internasjonale snittet i 1995. Dette har økt med 7 prosentpoeng. Avstanden er mindre for balanseoppgaven og størst for ligningen i oppgave 22253. En avstand på 50 prosentpoeng er meget stor.

Oppgavene 32424, 12002 og A2

Trendoppgave 12002, A2

En toarmet vektstang er i likevekt. På venstre side er det et lodd med vekt (masse) 1 kg og en halv murstein. På høyre side er det en murstein.



Hva er vekten (massen) av en murstein?

(A) 0,5 kg

(B) 1 kg

(C) 2 kg

(D) 3 kg

Rett svar: B 1 kg

Oppgave 12002, A2 er misforstått av en del av elevene, det er mange som har foreslått alternativ B (ca 20 % mot 15 % i 95). Den halve mursteinen må veie en kilo og det er mulig at de tror det er den det spørres etter. Dette er en trendoppgave og kan sammenliknes direkte. Det er en nedgang på 10 prosentpoeng fra 95 til 03, avstanden til det internasjonale snittet er 7 poeng lavere I 03. Problemstillingen var muligens mer kjent i 95. I L 97 nevnes ikke ligninger før i 9. klasse, der det å finne egne løsningsstrategier vektlegges. I M 87 er løsningsmetode for ligninger et emne på ungdomstrinnet (se kap. 3.2.4).

32434 er en vanskeligere versjon av samme oppgavetype. Oppgaven er krevende å lese. Feilene er relativt jevnt fordelt, men en litt større tendens til feilsvar D, noe som kan bety at halvparten av opplysningene er oppfattet. De norske elevene svarer på samme nivå som de internasjonale her, noe som må kunne anses som bra.

Oppgavene 22253, 32540, L16, O7

22253

Hvis $4(x + 5) = 80$, så er $x =$

Svar: _______________

Rett svar: x = 15

O7
Finn x når $3\,(x + 5) = 30$
A. 2
B. 5
C. 10
D. 95
Rett svar: B 5

L16
Finn x når $10x – 15 = 5x +20$
Svar:_______________
Rett svar: $x = 7$

Alle fire oppgavene tester ferdigoppstilte ligninger hvor elevene bes om å finne x. I oppgavene 32540 og O7 har de mulighet for å starte med svaret og sette inn for x. L 16 har ikke parentes, men har to ledd på høyre side. Sammen med 32540 med leddet 2x inne i parentesen er det den mest kompliserte ligningen. Strategier fra aritmetikk er ikke lenger så lette å bruke (Filloy & Sutherland 1996, se kap. 2.4.4)

Allikevel er 32540 mye bedre besvart enn 22253. Forklaring er sannsynligvis at svaralternativene er gitt. Dette har også slått ut i forholdet mellom L16 og O7, men ikke i samme grad. At bare 11 % har fått poeng på 22253 mot et internasjonalt snitt på 60 % er oppsiktsvekkende. Avstanden til det internasjonale snittet er også svært høyt for 32540 og O7. Dette er tydelig et område norske åttendeklassinger behersker dårlig og utviklingen har vært negativ fra 95 til 03. Dette stemmer med læreplanene. L 97 vektlegger som nevnt ikke ligningsløsning før i 9.klasse. M 87 åpner for å starte med dette tidligere (se også kap. 3.2.4).

I O7 svarer nesten 40 % alternativ C, at x er 10. Det kan virke som de overser femmeren i parentesen eller ikke vet hva den har der å gjøre. Det er etter min erfaring en vanlig feil hos mange elever at de multipliserer tallet foran parentesen med første ledd inni parentesen. At de ser helt bort fra andre ledd som her, er mer uvanlig. Det vanlige er å ta med femmeren som eget ledd videre i regningen (Smith 2003, se kap. 2.4.4). Forklaringen kan være at de har tatt utgangspunkt i svaralternativene, sett at $3 \cdot 10 = 30$, og tenkt seg hele parentesen som *en* ukjent. Dette kan også ha sammenheng med økt bruk av uformelle metoder som å holde over deler av ligningen eller gjetting og sjekking. Disse metodene er gode og hensiktsmessige i arbeidet med å forstå ligninger, men kan tenkes å gi opphav til misoppfatninger av denne typen hvor hele parentesen ses på som den ukjente. Det samme kan arbeid med oppgaver av typen $4 \cdot \_ = 20$ gjøre (Stephens 2004, se kap. 2.4.4). I 32540 er det mange feilsvar (rundt 20 %) på alternativ C. Det skyldes samme tankegang, de multipliserer første ledd i parentesen med 3. Disse overser ikke -1, noe som kan ha sammenheng med at ligningen er mer komplisert totalt sett.

Oppgavene 32210 og Q7

32210 Hvis $\frac{a}{b} = 70$, så er $\frac{a}{2b} =$ A 35 B 68 C 72 D 140 Rett svar: A 35

Q7 $P = LW$. Hvis $P = 12$ og $L = 3$, så er W lik A. 3/4 B. 3 C. 4 D. 12 E. 36 Rett svar: W = 4

Dette er to oppgaver som omhandler formelregning uten at formlene er knyttet til en kontekst. Q7 er korrekt besvart av ca 50 % av de norske, nesten 20 prosentpoeng under det internasjonale snittet på oppgaven. 32210 har bare snaut 20 % greid, avstand til internasjonalt snitt er 26 prosentpoeng. Denne oppgaven har vært vanskeligere enn Q7 både internasjonalt og nasjonalt. Den har en litt uvant utforming, du får ikke hjelp med å sette inn tall og må forstå at å sette faktoren to under brøkstreken betyr at du deler på to, og får halvparten av det du hadde til svar. Gjennom kalkulatorarbeid kan man arbeide med at man ikke trenger å bruke parentes når man deler på et produkt, man kan taste inn delingstegnet foran hver faktor i stedet. Da vil denne forståelsen kunne innarbeides på en god måte. Det er min erfaring at mange elever som er vant til å bruke kalkulator ikke er klar over dette. Det er mulig lærerne for sikkerhets skyld gir beskjed om at de alltid skal bruke parentes når de deler på ”flere ting”.

Oppgaven merker seg ut med at hvert svaralternativ har fått noe over 20 % svar, litt flere på alternativ C hvor de har lagt til 2, noe de antagelig har gjettet på skjer siden det dukker opp en toer i uttrykket.

Q7 har nesten halvparten klart, denne typen oppgaver arbeides det en del med blant annet i forbindelse med vei, fart og tid og Ohms lov. Norske elever gjør det også her dårlig sammenliknet med internasjonalt snitt. Det kan skyldes at denne regningen vektlegges på et senere tidspunkt i ungdomstrinnet. For de som ikke starter med svaralternativene prøver oppgaven ut flere ferdigheter. Du skal kunne sette inn tall, snu formelen (før eller etter innsetting) og utføre divisjonen.

2.Trendoppgave 12040, G4

12040, G4
Hvis $\frac{12}{n} = \frac{36}{21}$, så er n lik
A. 3
B. 7
C. 36
D. 63
Rett svar: B 7

Denne var noe bedre besvart in1995 enn i 2003, avstand til internasjonalt snitt økte også med 5 prosentpoeng. Dette er en oppgave hvor kunnskap om likeverdige brøker er en fordel. Sånn sett kunne den godt hørt hjemme i en annen kategori. Den kan løses som en ligning, men de fleste vil velge å sette inn et tall for n og se hva som stemmer. Feilsvar A og C som er de vanligste begge år, tyder på stor grad av gjetting (uten påfølgende sjekking).

Konklusjon kategori

Norske læreplaner har tonet ned arbeid med formell algebra. Arbeid med ligninger utsettes til slutten av ungdomsskolen, slik at norske åttendeklassinger etter L 97 ikke kan forventes å kjenne denne oppgavetypen særlig godt. Det er også mange som argumenterer for uformelle løsningsstrategier på oppgaver der ligning er et alternativ, dermed blir ikke ligningsreglene nødvendig lærestoff. Alle oppgavene over kan løses med mer uformelle løsningsstrategier. De krever kjennskap til hva det spørres etter og det er muligens her skoen trykker. Det at snittet var høyere i 1995 er naturlig, det er mer vekt på formell algebra i M 87 (se kap. 3.2.4). Avstand til internasjonalt snitt på over 20 prosentpoeng er dog betenkelig, all den tid norske elever også skal ut i verden å studere og gå på skole. I tillegg trengs kunnskaper om ligninger og algebra i all høyere matematikk.

5.3.2 Kategori mønstre

Innføring av algebra gjennom å se behov for å generalisere et mønster, gitt enten som en figur eller som en tallfølge ligger til grunn for oppgavene. Algebra i forbindelse med generaliseringer og mønstre, generaliseringsprosessen vektlegges i L 97 (se kap. 3.2.4). I tråd med læreplantrender er det flere oppgaver i 2003 enn i 1995 under dette temaet. Det er to trendoppgaver her, en fyrstikkoppgave og en tallfølgeoppgave. Jeg har valgt å dele kategorien i to og ser først på oppgaver om tallmønstre uten støtte fra figurer, dernest drøfter jeg oppgaver med støtte i figurer.

Kategori mønstre uten figurer

Tabell 5.3.2: Resultater kategori mønstre uten figurer

Oppgavenr	**Trend**	**År**	**Prosent rett Norge**	**Internasjonalt snitt**	**Differanse**
12029	Ja	2003	40	63	-23
32047		2003	49	56	-7
32673		2003	33	58	-25
32273		2003	63	77	-13
22008		2003	20	39	-19
22002		2003	11	30	-20
				Gjennomsnittsdifferanse	**-18**
E5	Ja	1995	49	64	-15
I1		1995	26	42	-16
I4		1995	50	48	2
				Gjennomsnittsdifferanse	**-10**
				Differanse mellom 2003 og 1995	**-8**

Norske elever ligger under det internasjonale snittet og tendensen forsterker seg. Dette til tross for at oppgavetypen har hatt et oppsving de senere år.

Oppgavene 22002 og I1

I1

Børre vil finne tre hele tall som følger etter hverandre i tallrekken, og

som har summen 81. Han skrev denne ligningen

$(n - 1) + n + (n + 1) = 81$. Hva står n for?

A. Det minste av de tre hele tallene

B. Det midterste av de tre hele tallene

C. Det største av de tre hele tallene

D. Differansen mellom det minste og det største av de tre hele tallene

Rett svar: B Det midterste av de tre hele tallene

De to oppgavene er svært like. Oppgavene krever forståelse for at en bokstav representerer et tall, at (n-1) er tallet 1 lavere enn n osv. Oppgavene er litt intuitive, all den tid at den etterspurte bokstav er plassert alene på "rett sted" i ligningen. I1 er greid av hver fjerde norske elev og 42 % internasjonalt. Bare 11 % greier 22002. Årsaken til at den er så mye vanskeligere, er ikke lett å se. Den har også vært vanskeligere for elevene i de andre landene, så avstanden til det internasjonale snittet har ikke økt med så mye at det viser noen tendens isolert. At det er snakk om tre partall, kan være en forklaring her.

For I1 er feilsvarene C og D veldig vanlige, over 30 % for hver av dem, svært få gjetter på alternativ A. For 22002 er det minste tallet det korrekte svaret, og det er det svaret færrest har angitt. Også her tror veldig mange at det må være det største, over 40 % foreslår det, alternativet med gjennomsnittet av tallene er også relativt hyppig foreslått, ca 25 %.

Oppgavene 22008 og I4

22008

Tallene i rekken 7, 11, 15, 19,23,…. øker med fire. Tallene i rekken 1, 10,19,28,37,… øker med ni. Tallet 19 er med i begge rekkene. Hvis rekkene fortsetter, hva er det neste tallet som er i BEGGE de to rekkene?

Svar:__________________

Rett svar: 55

I4

Tallene i rekken 2, 7, 12, 17, 22 ... øker hele tiden med fem. Tallene i rekken 3, 10, 17, 24, 31 .... øker hele tiden med sju. Tallet 17 finnes i begge rekkene. Hvis en skriver flere tall i de to rekkene, hva er da det neste tallet som er felles i begge rekkene?

Svar: ____________________

Rett svar: 52

Oppgavene er såpass like at nedgangen i hvor mange som greier dem er overraskende. På I4 klarer 50 % av de norske elevene å få poeng og her er vi for en gang skyld litt over det internasjonale snittet i en algebraoppgave. 22008 er det bare 20 % som klarer, 19 prosentpoeng under internasjonalt snitt. Begge har en enkel og en litt vanskeligere tallfølge, og ellers er det heller ikke noe som umiddelbart tilsier denne forskjellen. Oppgavene kan løses ved utprøving, eller ved å legge til minste felles multiplum for henholdsvis 4 og 9, 5 og 7. Utprøving vektlegges sterkere i L 97 enn i M 87, det gjør det enda vanskeligere å forklare. Svakere tallforståelse (Grønmo mfl. 2004) vil ha betydning og kan være en mulig grunn.

Oppgavene 32047, 32673, 32273

Oppgavene er noe ulike, men siden det ikke er noen tilsvarende oppgaver i 95, tar jeg en kort kommentar etter tur.

32273: Ganske mange greier denne, selv om enda flere greier den internasjonalt. Den vanligste feilen (ca 16 %) er alternativ C som gir rett svar hvis du går fra 1. til 2. tall i følgen. De glemmer eller prøver ikke å sjekke videre. Det kan også skyldes at de ikke helt vet at regelen må gjelde hele tallfølgen.

32673: En tredjedel av elevene her i landet greier den, 25 prosentpoeng under internasjonalt snitt. Over 25 % svarer alternativ B som betyr at de ikke har skjønt at endepunktene i intervallet også må økes med 5. At de tror det greier seg med fire, kan ha noe med forståelse for hvorvidt endepunktene er med eller ikke når spørsmålsformuleringen er "mellom". Kanskje vektlegges nøyaktighet, eksakthet for lite i undervisningen. 20 % tipper også på løsning A, som tyder på at de har trukket fra 5.

32047: Oppgaven kan sies å være noe beslektet med 22002 og I1, fordi de må sette opp et regnestykke med et gitt ukjent tall, tallet under og tallet over. Deretter skal de selv trekke sammen uttrykket og finne et algebraisk uttrykk som svar. Dette gjør oppgaven allikevel en del annerledes og vanskeligere. Du må blant annet kunne trekke sammen like ledd i et førstegradspolynom her. Allikevel er det mange flere som greier denne oppgaven enn 22002, nesten 50 % og her ligger vi bare 7 prosentpoeng under internasjonalt snitt. Det er ingen feilsvar som utmerker seg, de er jevnt fordelt. Akkurat dette er det vanskelig å forklare, kanskje har det bare å gjøre med hva de har trent på i lærebøker, hva som virker familiært.

Trendoppgave 12029, E5

12029, E5

(3, 6) , (6, 15) , (8, 21)

Påstandene under beskriver hvordan man finner det andre tallet ut fra det første tallet i hvert av tallparene over. Hvilken påstand er riktig?

A. Legge til 3

B. Trekke fra 3

C. Gange med 2

D. Gange med 2 og så legge til 3

E. Gange med 3 og så trekke fra 3

Rett svar: E Gange med 3 og så trekke fra 3

Oppgaven kan minne litt om 32273 all den tid de skal finne en sammenheng og beskrive den med ord. Resultatet følger det mønstret som ses hele veien, vi gjør det dårlig sammenliknet med andre land og vi gjør det dårligere i 2003 enn i 1995. Internasjonalt er denne oppgaven relativt likt besvart begge år. De vanligste feilforslagene begge år er C og D, spesielt D. Det kan skyldes at de bare sjekker det ene tallparet, det i midten og ikke forstår eller orker å sjekke de to andre. Feil C passer tilsvarende på det første tallparet.

Det er en klar sammenheng mellom god tallforståelse og løsning av oppgaver av denne typen slik jeg ser det. Her ligger sannsynligvis noe av forklaringen på nedgangen.

Kategori mønstre med figurer

Tabell 5.3.3: Resultater kategori mønstre med figurer

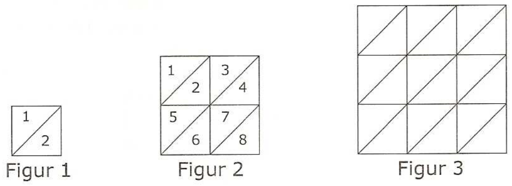
Oppgavenr	**Trend**	**År**	**Prosent rett Norge**	**Internasjonalt snitt**	**Differanse**
12017	Ja	2003	46	60	-14
32640		2003	10	26	-16
32757		2003	46	67	-21
32760a		2003	17	41	-24
32760b		2003	9	28	-19
32760c		2003	4	19	-15
32761		2003	3	24	-21
22261a		2003	35	52	-17
22261b		2003	14	34	-20
22261c		2003	11	26	-15
				Gjennomsnittsdifferanse	**-18**
C5	Ja	1995	50	60	-9
S1a		1995	77	79	-2
S1b		1995	22	32	-10
				Gjennomsnittsdifferanse	**-7**
				Differanse mellom 2003 og 1995	**-11**

Det er en skjevhet i materialet her. Det er langt flere oppgaver i 2003 enn i 1995. Tre av oppgavene, S1, 22261 og 32760/61 er oppgaver som henger sammen. Det betyr at forstår du a) forstår du lettere b) osv. Jeg vil anta at dette er oppgaver en del elever vegrer seg mot, noe som vil vise seg i svarprosenten. Ellers ses som vanlig en tendens til at norske elever er under det internasjonale snittet og at den tendensen øker fra 1995 til 2003. Skjevheten i materialet gjør at det er vanskelig å uttale seg for bastant.

Oppgavene 22261 og S1

22261

De tre figurene nedenfor er delt inn i små, like trekanter.



A. Fullfør tabellen nedenfor. Fyll først ut hvor mange små trekanter det er i figur 3. Finn så hvor mange små trekanter det vil være i figur 4 hvis rekka fortsetter.

Figur	Antall små trekanter
1	2
2	8
3	
4	

B. Rekka fortsetter til figur 7. Hvor mange små trekanter vil det være i figur 7?

Svar: ______________

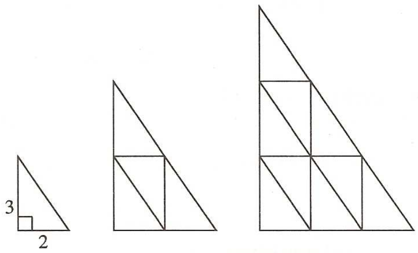
C. Rekka med figurer fortsetter til figur 50. Forklar uten å tegne og telle hvordan vi kan finne antallet trekanter i figur 50.

A. Rett svar: Figur 3: 18 små trekanter, Figur 4: 32 små trekanter

B. Rett svar: Figur 7: 96 små trekanter

C. Rett svar: $2n^2$ der n = 50

S1. Nedenfor ser du de tre første trekantene i en rekke formlike trekanter. Alle de små trekantene er kongruente (har samme form og størrelse).



Figur 1 Figur 2 Figur 3

a. Finn ut hvor mange små trekanter hver figur er bygget opp av, og skriv det du fant i tabellen.

Figur	Antall små trekanter
1	1
2	
3	

b. Rekken av formlike trekanter fortsetter til Figur 8. Hvor mange små trekanter er Figur 8 bygget opp av?

a. Rett svar: Figur 2: 4 små trekanter Figur 3: 9 små trekanter

b. Rett svar: Figur 8: 8^2 = 64 små trekanter

S1 og 22261 er relativt like med unntak av 22261 c. S1 a og b er betydelig bedre besvart av norske elever enn 22261 A og B, ikke minst gjelder dette tabellutfyllingen. Figuren i 22261 er nok noe vanskeligere, men det er likt for alle land. Litt underlig at så få greier 22261A også ut fra at norske elever er relativt gode i datarepresentasjon (Grønmo mfl. 2004). At bare 11 % greier C er ikke overraskende, denne form for generalisering er vanskelig på dette nivået. Det er ca 80 % som har besvart S1 b, ca 95 % har besvart a. Når det gjelder 22261, har vi det samme mønstret som for S1 a og b, mens 22261 c er det nesten 50 % som ikke har besvart. Dette bekrefter i tillegg til vanskelighetsgraden at de lett faller fra underveis i lange, oppdelte oppgaver.

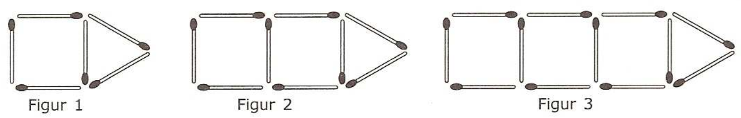
Oppgavene henger sammen alle fem og kommer bak i heftet, noe som kan være noe av forklaringen på lav prosent riktig svar. På den annen side gjelder dette for alle andre land også, så den store avstanden til det internasjonale snittet kan ikke forklares med dette. Tabellutfyllingen i 32757 går relativt greit, men over 20 % har ikke svart. De neste tre oppgavene, 32760 a, b, c, burde være greie med en videre utfylling av tabellen i 32757. De aller fleste detter av lasset , rundt 30 % lar være å svare. Når det gjelder oppgave 32761 hvor de blir bedt om å skrive ned det generelle algebraiske uttrykket, er det godt over 60 % som ikke svarer. Dette er en svært vanskelig oppgave, så det er forståelig. Samtidig ligger det internasjonale snittet 19 prosentpoeng høyere, noe som viser at dette ikke bare kan handle om alder og modenhet når det gjelder generalisering, men også noe med trening på denne typen matematikk.

Oppgave 32640

Oppgaven kan minne litt om trendoppgaven nedenfor, men dette er ikke en flervalgsoppgave. De skal generalisere og vise utregningen sin. 10 % av de norske har fått poeng her mot 26 % internasjonalt. Mellom 15 % og 20 % har ikke besvart oppgaven. Oppgaven er selvsagt vanskelig, tellestrategien tar tid, mens generaliseringsstrategien krever evne til abstraksjon, noe som ikke er like godt utviklet hos alle 13-14 åringer.

Trendoppgave 12017, C5

Figurene under er bygget opp av fyrstikker etter et mønster.



Hvor mange fyrstikker trenger man til den tiende figuren dersom mønsteret fortsetter?

Ⓐ 30
Ⓑ 33
Ⓒ 36
Ⓓ 39
Ⓔ 42

Rett svar: 3n + 3 = 33

Disse to kan sammenliknes direkte. Som vi ser i tabell 5.3.3 er det internasjonale snittet likt i 95 og 03. Siden de norske elevene i 03 ligger 5 prosentpoeng lavere enn i 95, ser vi nok et eksempel på negativ trend for våre åttendeklassinger. Oppgaven kan løses ved telling, selv om det er noe tidkrevende. Begge år ligger de fleste feil (mellom 15 % og 20 %) på alternativ A, men også alternativ C og E er foreslått av nesten like mange (mellom 5 % og10 %). Alternativ A kan tyde på at de ser at det vokser med 3 fyrstikker for hver figur og multipliserer 10 med 3 for å få den tiende figuren.

Konklusjon kategori mønstre

På tross av den økte bruk av generalisering av mønstre som en tilnærming til algebra, med hjelpemidler som såkalte figurtall og andre typer halvkonkreter ser det ut til at elevene også her har en nedgang i prestasjonene mellom 1995 og 2003. Mønsteroppgaver kan på dette nivået løses ved en utprøvende framgangsmåte, noe jeg gjetter at elevene har forsøkt. Formelle strategier som å se på første- og andredifferanse er ikke aktuelt på dette trinnet. Oppgavene kan knyttes sterkere opp mot funksjoner (Smith 2003, se kap. 2.4.3), men det temaet kommer senere i ungdomsskolen.

Det er mulig det er en sammenheng mellom resultatene og manglende arbeid med bokstavregning med ulike tilnærminger. Konkretiseringer som disse siste oppgavene er et eksempel på, og formelle tilnærminger for eksempel. Svake begreper fra tallregning om for eksempel multiplikasjon, vil svekke elevenes begreper om uttrykk som 2x og x^2 (se kap. 2.4.4). Hvis lærebøker og lærere fortsatt snakker om bokstaver som fysiske objekter, a for appelsiner og b for bananer, hjelper ikke det på elevenes oppfatning av algebraiske uttrykk (se kap. 2.4.4).

5.3.3 Kategori Innsettinger med underkategori negative tall

Kategorien baserer seg på trendoppgavene 12042 og G6. Den tester to ulike ting: innsetting av et tall for en bokstav og kunnskap om regning med negative tall. Jeg har valgt å ta med begge typer problemstillinger i denne drøftingen, derav også noen rene talloppgaver som prøver regning med negative tall. En oppgave som Q7 kunne også vært plasser her, siden det er en innsettingsoppgave.

Tabell 5.3.4: Resultater i kategorien innsettinger og negative tall

Oppgavenr	**Trend**	**År**	**Prosent rett Norge**	**Internasjonalt snitt**	**Differanse**
12042	Ja	2003	9	58	-49
32538		2003	15	52	-37
32612		2003	5	47	-42
32525		2003	18	60	-42
32643		2003	25	49	-24
				Gjennomsnittsdifferanse	**-39**
G6	Ja	1995	26	59	-34
N13		1995	39	60	-21
				Gjennomsnittsdifferanse	**-27**
				Differanse mellom 2003 og 1995	**-11**

Det var ingen rene oppgaver med negative tall i 1995, dette betyr at det er mest naturlig å sammenlikne oppgavene fra 1995 med de to øverste oppgavene fra 2003 i tabell 5.3.4 .

Gjennomsnittsdifferansen der er -43 prosentpoeng mot -27 i 1995. Som vi ser er avstanden til det internasjonale snitt svært stor for alle oppgaver i denne kategorien og den øker fra 1995 til 2003. Her velger jeg å se på trendoppgaven først siden den inneholder begge problemstillinger.

Trendoppgave 12042, G6

12042, G6
Hva er verdien av $-3x$ når $x = -3$?
A. -9
B. -6
C. -1
D. 1
E. 9
Rett svar: E 9

Det internasjonale snittet for denne oppgaven er likt for de to undersøkelsene. Mens hver fjerde norske elev klarer oppgaven i 1995, er det bare hver tiende som klarer den i 2003, altså en dramatisk nedgang. Oppgaven krever at du skjønner at skriveformen -3x betyr at du skal multiplisere, i tillegg må du kunne multiplisere to negative tall. De fleste feilsvar har vært alternativ A som tyder på at de ikke vet at minus gange minus er pluss og feilsvar B som tyder på en summering av -3 med -3, at de leser det som -3 to ganger. En summering av -3 tre ganger kan også ligge bak feilsvar A. Dette hvis man tenker multiplikasjon som gjentatt addisjon (se kap. 2.3.4) .

I 95 var disse to feiltypene likt fordelt, ca 30 % på hver, mens det i 2003 er litt over 20 % som foreslår alternativ A og over 40 % som foreslår alternativ B. Det kan tyde på at det er flere i 95 som forstår at de skal multiplisere når de ser uttrykk som -3x. Nedtoning av arbeid med algebra i norsk skole kan medføre at enda flere ikke har noe forhold til denne notasjonen som jo slett ikke er intuitiv.

Oppgavene 32538 og N13

N13
Finn verdien til uttrykket $\frac{7x+4}{5x-4}$ når x = 2
Svar: ___________________
Rett svar: 3

Oppgavene tester mye av det samme, men formuleres noe forskjellig. 32538 er regnemessig noe enklere enn N13 pga av tallene, samtidig vil uttrykk som ”y = ” og ”verdien av y” antagelig forvanske oppgaven.

Nær 40 % klarer N13, mens 15 % klarer 32538. Oppgavenes forskjellighet kan vanskelig være hele forklaringen, selv om det internasjonale snittet er 8 prosentpoeng lavere på 32538 enn på N13. Sannsynligvis trenes det mindre på slike oppgaver. Oppgavetype 32538 brukes mye når tabellverdier skal beregnes i forbindelse med funksjonsregning. Elever som er vant til å arbeide med denne typen oppgaver vil dermed ha en fordel. Det gjelder ikke norske åttendeklassinger.

Underkategori negative tall

Her har jeg funnet tre oppgaver fra 2003, oppgavene sorterer under TIMSS-kategorien *tall* og tester forståelse for regning med negative tall. To av dem kunne like gjerne vært plassert under algebra i TIMSS-undersøkelsen, det gjelder både 32643 og 32525.

Oppgavene 32643, 32612 og 32525

32643 Hvis n er et negativt helt tall, hvilket av disse uttrykkene er størst? A $3 + n$ B $3 * n$ C $3 - n$ D $3 : n$ Rett svar: C 3 - n

32612 Hva blir $1-5\cdot(-2)$? A 11 B 8 C −8 D −9 Rett svar: A 11

25 % av norske elever greier **32643**, mot nesten 50 % internasjonalt. Over 40 % foreslår alternativ B, sannsynligvis fordi de er vant til å tenke at multiplikasjon gir størst svar (se kap. 2.3.3). De overser også svarenes fortegn kan det se ut til. Alternativ D har færrest tilhengere noe som forsterker inntrykket av at de tar med seg kunnskaper fra regning med naturlige tall her.

32612 er en ren regneoppgave som bare 5 % av norske åttendeklassinger greier. Her ligger de igjen over 40 % under internasjonalt snitt. Mer enn 50 % foreslår alternativ C som tyder på at de trekker sammen 1 med -5 og så multipliserer. Deretter gjør de samme feil som i trendoppgaven, de vet ikke at minus gange minus er pluss, enda det er en puggeregel av en type skolen kritiseres for å bruke. Nær 30 % trekker sammen 1 med -5 og multipliserer så riktig, altså alternativ B.

I oppgave **32525** ligger vi også 42 % under det internasjonale snittet og det vanligste feilforslaget er rett tallverdi men feil fortegn (ca 30 %). Rundt 20 % samler seg rundt B, det samme for C. De leser nok oppgaven feil og deler 12 med -6. Ut fra dette kan man kanskje si at ca. 40 % av de norske elevene vet at deler du et positivt tall på et negativt, blir svaret negativt.

Konklusjon kategori

Begge emneområdene som er tatt med her inneholder matematikk som er ukjent for de aller fleste norske åttendeklassinger, i alle fall i 2003. Grunnen til de dårlige resultatene må være så enkel som at dette trenes det overhodet ikke noe på på dette alderstrinnet. Negative tall ses på som vanskelige og abstrakte, det samme gjør funksjoner, så emnene utsettes til sent i ungdomstrinnet.

Her kommer det også fram at de har liten trening i riktig regnerekkefølge i et oppsatt regnestykke, i oppgave 32612 er multiplikasjonstegnet med i motsetning til trendoppgaven. Over halvparten vet ikke at de må multiplisere før de trekker sammen. De kalkulatorene som er i bruk på dette trinnet, krever denne kunnskapen, så her er det ikke naturlig å skylde på utstrakt bruk av kalkulator.

5.3.4 Kategori funksjoner

Oppgavene omhandler tolking av grafer, tabeller, ligninger for førstegradsfunksjoner. Funksjonsperspektivet er en av fire tilnærmingsmåter til å arbeide med algebra (se kap. 2.4.3).

Janviertabellen gir en oversikt over sammenhenger mellom ulike representasjonsformer for funksjoner i skolematematikken (se kap. 2.4.3).

Tabell 5.3.5: Resultater kategori funksjoner

Oppgavenr	**Trend**	**År**	**Prosent rett Norge**	**Internasjonalt snitt**	**Differanse**
12025	Ja	2003	64	75	-11
32163		2003	30	57	-28
32477		2003	41	58	-17
32637a		2003	57	71	-14
32637b		2003	51	70	-19
32637c		2003	42	56	-14
				Gjennomsnittsdifferanse	**-17**
E1	Ja	1995	65	74	-9
D10		1995	39	52	-13
H10		1995	32	59	-27
J18		1995	34	44	-10
				Gjennomsnittsdifferanse	**-15**
				Differanse mellom 2003 og 1995	**-2**

Tallene viser at på dette området er det liten forskjell fra 1995 til 2003. Avstanden til det internasjonale snittet er stor for begge undersøkelser. Norske elever gjør det relativt sett best i emnet datarepresentasjon (Grønmo mfl. 2004), et emne som er beslektet med funksjoner på noen områder. Dette ser ikke ut til å slå positivt ut her.

Oppgavene 32163 og H10

Oppgavene er svært like. Her kan elevene ta utgangspunkt i formelen, sette inn for x og se for hvilken formel de ordnede parene passer. I praksis er det ingen forskjell mellom de to undersøkelsene når det gjelder prosentandel rett svar og avstand fra tilsvarende internasjonalt. Den er på hele 25 % for begge oppgaver. Det kan tyde på at denne typen oppgave er vanligere på dette trinnet i mange av de andre landene som er med. Vanligste feil i 95 er å forslå formel A som passer med det første tallparet (hele 30 %), mens det i 03 foreslås formel B som passer med det andre tallparet hos nesten 35 %, 20 % foreslår formel A som passer med det siste. Resultatet, særlig i 03 kan derfor tyde på mye gjetting. Erfaringsmessig vil mange se på første tallpar og generalisere ut fra det, jfr. trendoppgave 12029, E5 under tallfølger (som for øvrig egentlig er samme tema (se kap. 5.2.2)).

Oppgave J18

J18

Denne tabellen viser en bestemt sammenheng mellom x og y

x	y
1	1
2	?
4	7
7	13

Hvilket tall mangler i tabellen?

A 2

B 3

C 4

D 5

E 6

Rett svar: B y = 3

I J18 skal de se på sammenhenger mellom x og y i en tabell hvor den ene y – verdien mangler. Oppgaven kan også ses på som en mønsteroppgave, men siden forholdet mellom x og y etterspørres og tallene er ordnet i en typisk funksjonstabell har jeg valgt å plassere den her. Dette er den funksjonsoppgaven hvor avstanden til det internasjonale snittet er minst, "bare" 10 prosentpoeng. Det er i virkeligheten samme utrykk som i 32163 som skal finnes. Vanligste feil (over 20 %) er alternativ C hvor det er foretatt addering med 3 fra y til y i de tre første tallpar. Sannsynligvis har de ikke observert skikkelig at x-verdiene endrer seg med mer enn 1 for hver rad og tenker y-verdiene som en tallfølge. Elever har en tendens til å intuitivt fokusere på endring mer enn korrespondanse (Smith 2003, se kap. 2.4.3)

Oppgavene 32477 og D10

Oppgavene er knyttet til hver sin kontekst, opptrykking av kart og taxikostnader. De skal finne et uttrykk for fast og variabel kostnad. På samme måte som i sted er oppgavene relativt likt besvart både med hensyn til rett svar, internasjonalt snitt endres noe i negativ retning.. Alternativene er noe forskjellig, så det blir litt vanskelig å vurdere feilene samlet. D10 alternativ D og 32477 alternativ B er vanlige feil begge år. Her velger de multiplikasjon i stedet for sum. Alternativ E for D10 er det få som foreslår enda det er samme feil som B i 32477.

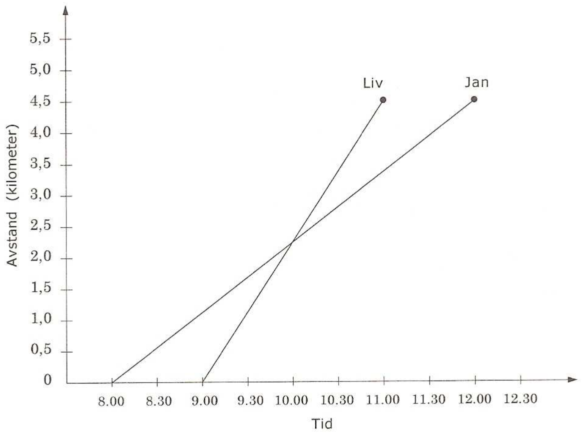
Denne oppgavetypen er bedre besvart enn tabelloppgavene 32163 og H10. De gjør det altså bedre også sammenliknet med internasjonalt snitt når de går fra kontekst til formel enn når de går fra tabell til formel, antagelig fordi det første her er mer intuitivt og krever mindre formelle algebrakunnskaper.

Oppgave 32637 a, b og c

Dette er den oppgaven som likner mest på trendoppgaven nedenfor all den tid den tester avlesning av graf.. Først skal de bruke en regnefortelling til å velge hvilken av to rette linjer som beskriver hvilken sammenheng, altså samme type spørsmål som i 32477 og D10. Forskjellen her er at de går fra situasjon til graf og ikke fra situasjon til formel (se kap. 2.4.3). I punkt B avleses grafens skjæringspunkt som svar på spørsmålet og i punkt C må de avlese avstanden ved en gitt førstekoordinat. Oppgaveresultatet ligger ca 15 prosentpoeng under det internasjonale snittet, og med unntak av C har over halvparten greid dem. Å knytte ordet forskjell til avstand mellom to grafer er antagelig uvant. Dette stemmer med min egen erfaring som lærer i funksjonslære på høyere klassetrinn i mange år.

Trendoppgave 12025, E1

Denne grafen viser sammenhengen mellom avstand og tiden for en tur som Liv og Jan tok.



De startet begge fra samme sted og gikk i den samme retningen. Hvilket klokkeslett vil Liv ta igjen Jan?

- (A) 8.00
- (B) 8.30
- (C) 9.00
- (D) 10.00
- (E) 11.00

Rett svar: D kl. 10.00

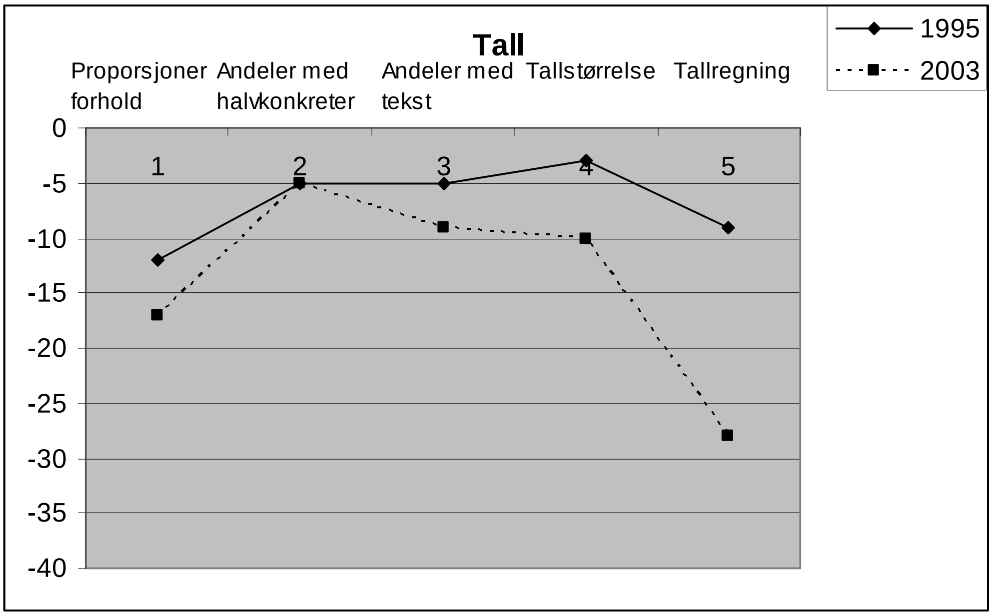
Oppgaven er en anelse bedre besvart i 95 enn i 03, også sett i forhold til internasjonalt snitt. Forskjellen er etter mitt syn alt for liten til å trekke noen trendkonklusjon som avviker fra inntrykket i kategorien som helhet. Avstanden til det internasjonale snittet er noe lavere her enn for de andre oppgavetypene i kategorien. Vanligste feil er begge år alternativ E. Det kan tyde på at de ser på endepunktene for turen som er merket spesielt og ser når Livs graf ligger like høyt på y-aksen som Jans graf. De ser altså etter lik avstand, ikke likt tidspunkt. Denne forvirringen mellom første og andrekoordinater er velkjent.

Konklusjon kategori

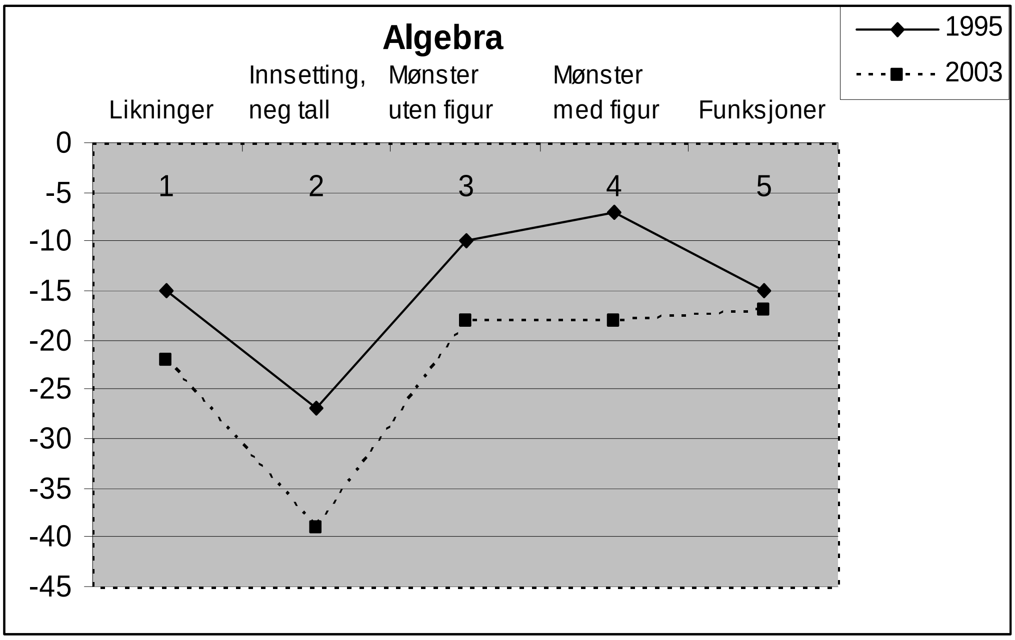
Dette er en gruppe oppgaver som er svært likt besvart i 95 og 03. Tendensen når det gjelder oppgavetyper er at oppgaver som krever noen formelle algebrakunnskaper som det å gå fra tabell til formel er dårligst besvart. Best besvart er avlesing av graf, noe som kanskje har en sammenheng med at norske elever arbeider en del med datarepresentasjon og samfunnsfaglig matematikk. Å gå fra situasjon til formel eller til graf har også forbausende lik avstand til internasjonalt snitt, og ligger prestasjonsmessig mellom spørsmål om de andre sammenhengene (se kap. 2.4.3). At samfunnsfaglig matematikk er vektlagt mer i L 97 enn i M 87, kommer ikke direkte fram i resultatene her. Kanskje kan det faktum at de *ikke* gjør det vesentlig dårligere i 03 enn i 95 forklares med dette, for ellers er trenden med nedgang i prestasjoner relativt entydig, spesielt når det gjelder algebra.

5.4 Sammenfatning av oppgaveanalysen

Følgende grafiske framstillinger viser en grovinndeling av resultatene av mine beregninger. Verdiaksen viser avstand til det internasjonale snittet som her har verdi null. Grafene angir hvor mange prosentpoeng avviket fra dette snittet er i 1995 (heltrukken graf) og i 2003 (stiplet graf).



Figur 5.4.1: Grafisk fremstilling av endring i tallresultater



Figur 5.4.2: Grafisk fremstilling av endring i algebraresultater

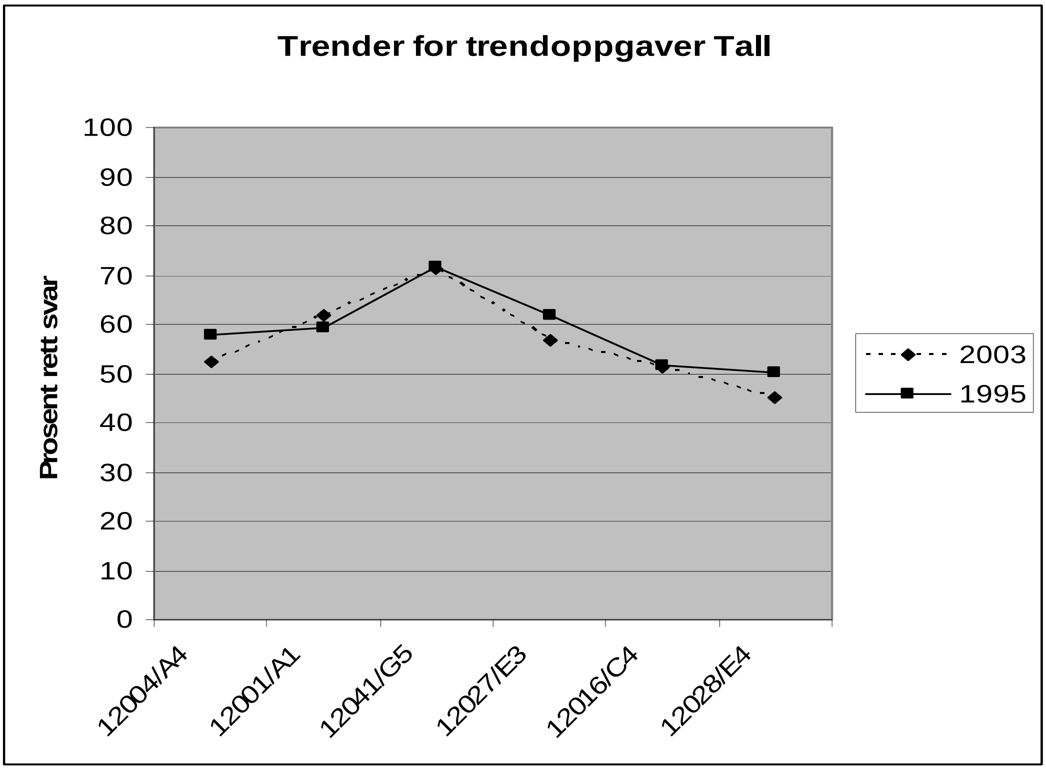
Figur 5.4.1 og 5.4.2 bekrefter at for alle mine oppgavekategorier under tall og algebra ligger norske elever under det internasjonale gjennomsnitt. Med unntak av andeler med halvkonkreter og delvis funksjoner har tendensen forsterket seg fra 1995 til 2003. Endring på over ti prosentpoeng finner vi for tallregning, innsetting/ negative tall og mønstre med figur. For kategorien proporsjonalitet og forhold, tallstørrelse og alle algebrakategoriene er avstanden til internasjonalt snitt stor i 2003.

Trendoppgavene

Figur 5.4.3 og 5.4.4 viser hvor mange som har greid de 12 trendoppgavene. Siden disse oppgavene kan sammenliknes direkte med henblikk på prosent riktig svar, er det mening i å lage en slik grafisk framstilling.

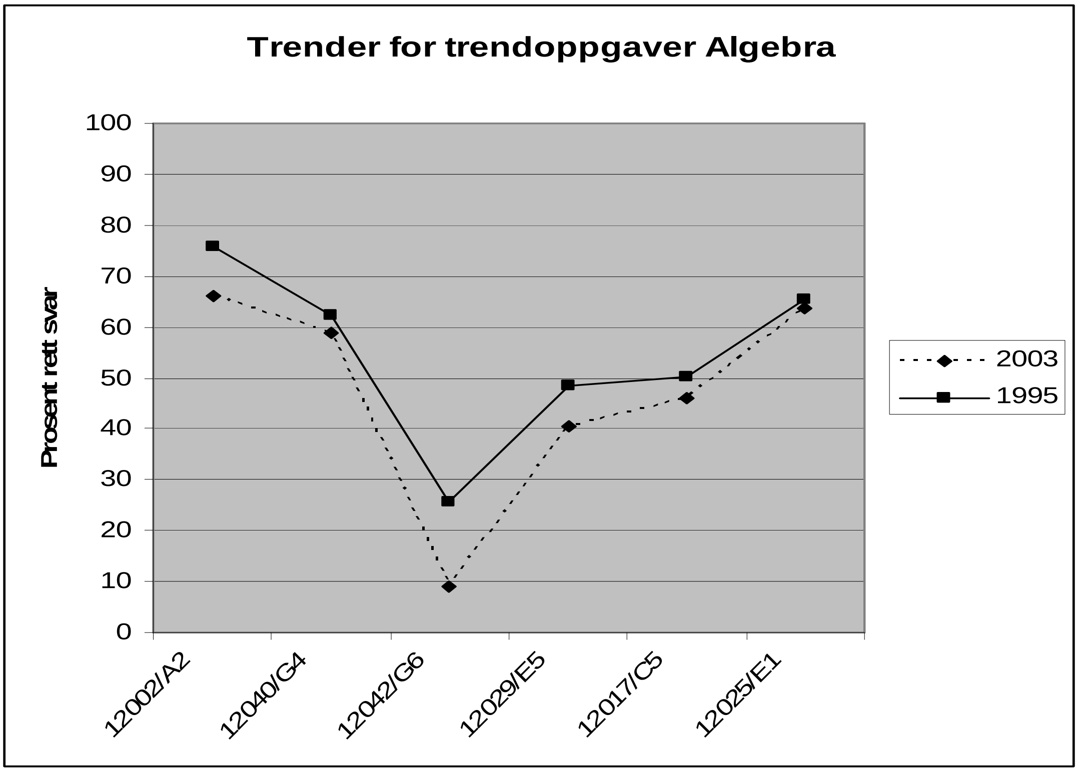
Tabell 5.4.1: Oversikt over trendoppgavenes emner

Proporsjoner / forhold	**Andeler halvkonkreter**	**Andeler tekst**		**Tallstørrelse**	**Tallregning**
12004/A4	12001/A1	12041/G5	12027/E3	12016/C4	12028/E4
Ligninger		**Mønstre uten figur**	**Mønstre med figur**	**Innsetting/negative tall**	**Funksjoner**
12002/A2	12040/G4	12029/E5	12017/C5	12042/G6	12025/E1



Figur 5.4.3: Prosent riktig svar for trendoppgaver Tall

Grafene i figur 5.4.3 at fem av de seks oppgavene har lavere oppnådd prosent riktig svar i 2003 enn i 1995. Dette forsterker funnene fra analysen av oppgavekategoriene om en tilbakegang. viser at det er tre oppgaver som er omtrent like bra eller bedre besvart i 2003 enn i 1995. Andeler med halvkonkreter er bedre besvart (3 prosentpoeng), en oppgave fra andeler med tekst og tallstørrelsesoppgaven ligger ett prosentpoeng lavere i 2003. For de andre tre oppgavene er forskjellen 5 – 6 prosentpoeng (se kap. 4.4.4).



Figur 5.4.4: Prosent riktig svar for trendoppgaver Algebra

Figur 5.4.4 viser en enda klarere nedgang for algebra enn for tall. Alle kategoriene har en nedgang, for tre av oppgavene er den stor, hele 17 prosentpoeng for innsettingsoppgaven. Endringene i prosentpoeng er på -10, -3, -17, -9, -4 og -1. På samme måte som for tallkategoriene bekreftes funn fra analysen av oppgavekategoriene.

Tabell 5.4.2: Endring i det internasjonale gjennomsnittet for mine oppgavekategorier

Kategori	1995	2003	Differanse
Ligninger	72	63	-8
Innsetting / negative tall	60	53	-7
Mønstre uten figur	51	54	2
Mønstre med figur	57	38	-19
Funksjoner	58	64	7
Proporsjonalitet/forhold	56	57	1
Andeler med halvkonkreter	67	71	4
Andeler med tekst	55	59	4
Tallinje	65	62	-3
Tallregning	74	62	-12

Tabellen viser mulige endringer i det internasjonale snittet i de 16 land jeg har tatt med for mine oppgavekategorier. At for eksempel tallregning og mønstre med figur har hatt en negativ endring også internasjonalt er ikke spesielt oppløftende sett med norske øyne, siden det er avstanden fra dette snittet som er brukt som målestokk og den har økt. Omvendt kan man se en positiv utvikling for spesielt funksjoner.

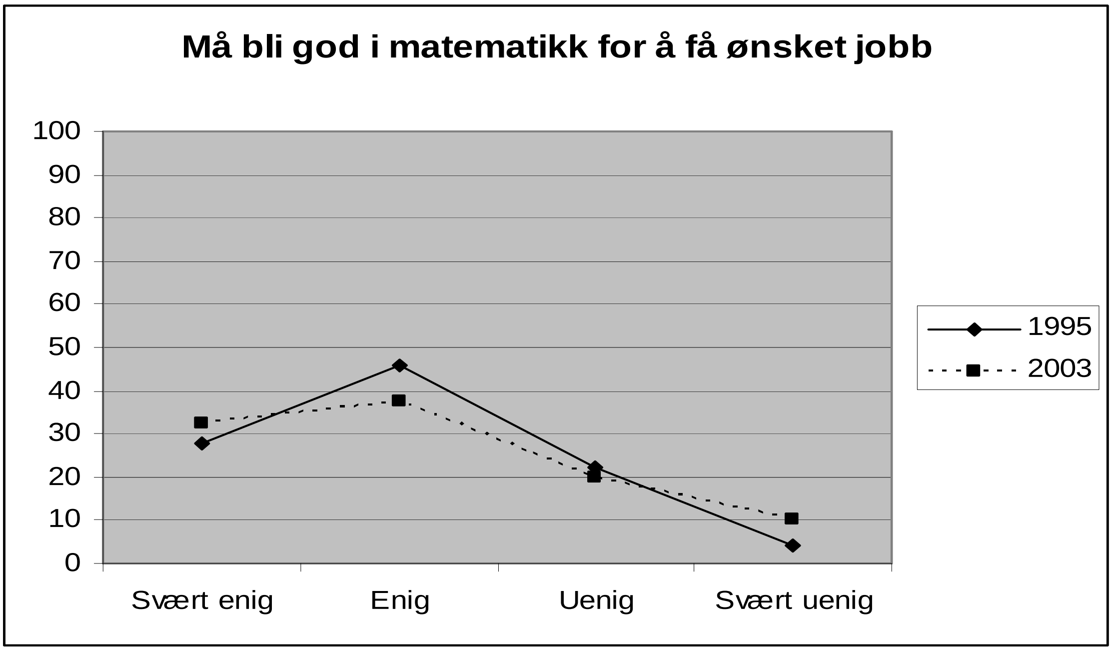
5.5 Elevspørsmål

5.5.1 Hva viser tallene for elevspørsmål

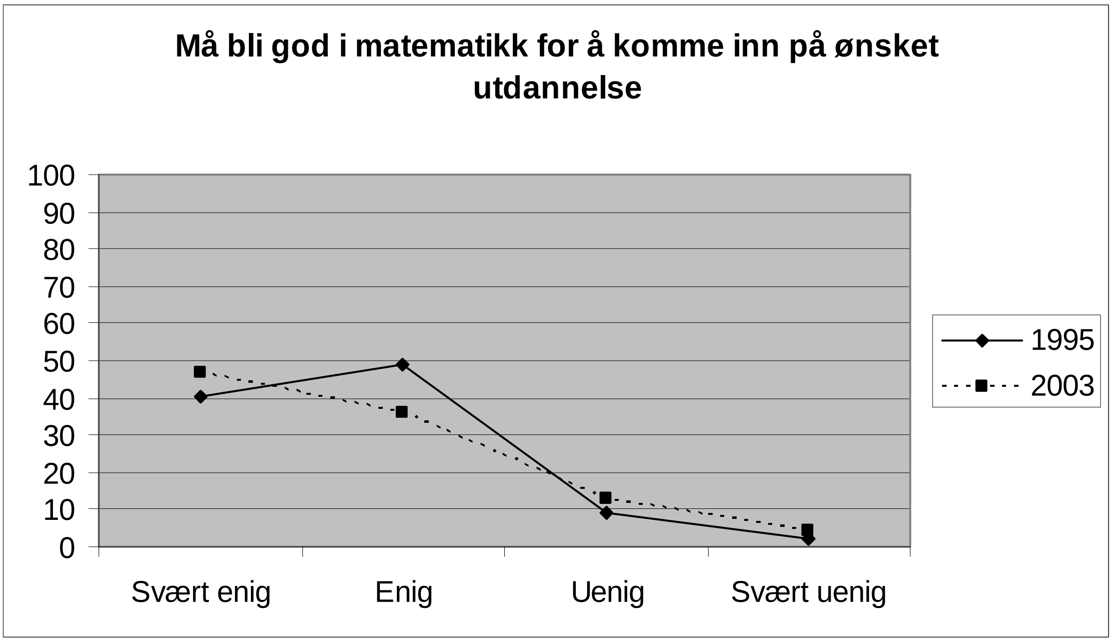
Dette kapitlet inneholder en del grafiske framstillinger som viser resultatene av beregninger gjort ut fra elevspørreskjemaene. Elevene som besvarte oppgaveheftene besvarte som nevnt også et elevspørreskjema slik at det er de samme respondentene. Utvalget av spørsmål i dette kapitlet er foretatt ut fra to kriterier. Er spørsmålet interessant i forhold til mine forskningsspørsmål? Er det mulig å sammenlikne mellom TIMSS 1995 og TIMSS 2003? Mange av spørsmålene i de to undersøkelsene er så ulike at sammenligning ikke lar seg gjøre, blant annet på grunn av ulik ordlyd i svaralternativene. I noen tilfeller har jeg tatt med spørsmål hvor ordlyden på svaralternativene ikke er helt identisk. Jeg har allikevel valgt å se dem i sammenheng når ordlyden er såpass lik at jeg antar de tolkes på samme måte.

5.5.2 Holdninger og motivasjon

Elevers holdning til faget og følelse av at det er viktig for deres framtid kan ha betydning for innsats og prestasjoner. En eventuell endring her kan være med å forklare endringene i prestasjoner. Jeg har tatt med de tre spørsmålene som er like for begge undersøkelsene.

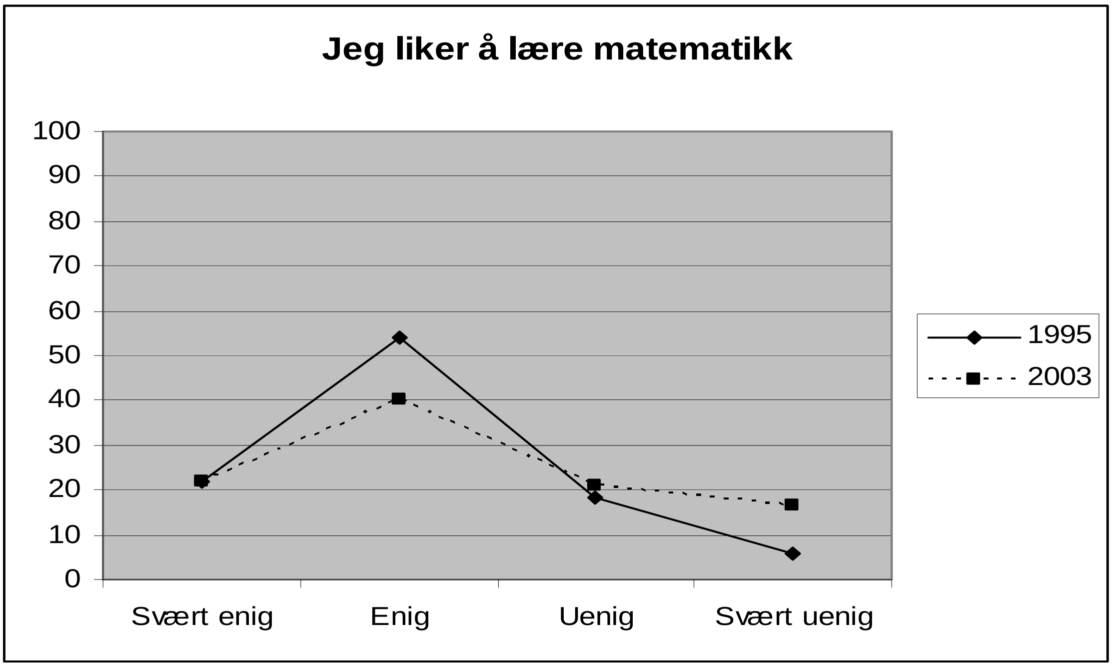


Figur 5.5.1: Framtidig jobbmulighet



Figur 5.5.2: Mulig utdannelse

Figur 5.5.1 og figur 5.5.2 viser at på spørsmålene om hva matematikk har å si for framtidig jobb og utdannelse svarer elevene forholdsvis likt i 1995 og i 2002. I vårt samfunn er det en økende vektlegging av betydningen av gode matematikkunnskaper for framtidige jobber. Dette ser ikke ut til å ha påvirket disse elevene. Snarere ser det ut til at det er litt færre som tror at faget vil være viktig for å få ønskejobben i 2003. I begge tilfeller er det noen flere svært enige, men samtidig enda færre som svarer ”enig”. På utdannelsesspørsmålet er det en tilsvarende kurve, men færre er i 2003 svært uenig i viktigheten av matematikkunnskaper i denne sammenheng.

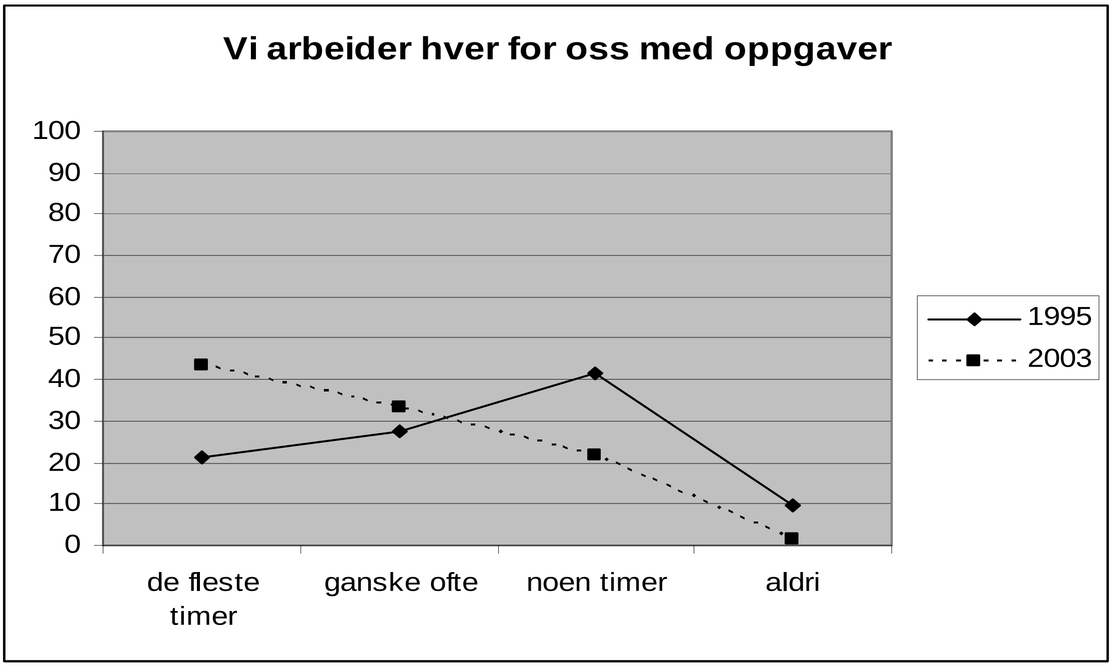


Figur 5.5.3: Holding til faget

Hva så med påstanden: ” Jeg liker å lære matematikk”.? Figur 5.2.3 viser at det er like mange som er svært enige og uenige, mens betydelig færre er enige i denne påstanden i 2003 enn i 1995. Det er også over 10 prosentpoeng forskjell på de som svarer at de er svært uenige i at de liker å lære matematikk mellom 2003 og 1995. Det ser med andre ord ut til at gleden ved faget har avtatt og det er interessant å se i sammenheng med de andre resultatene i dette kapitlet .

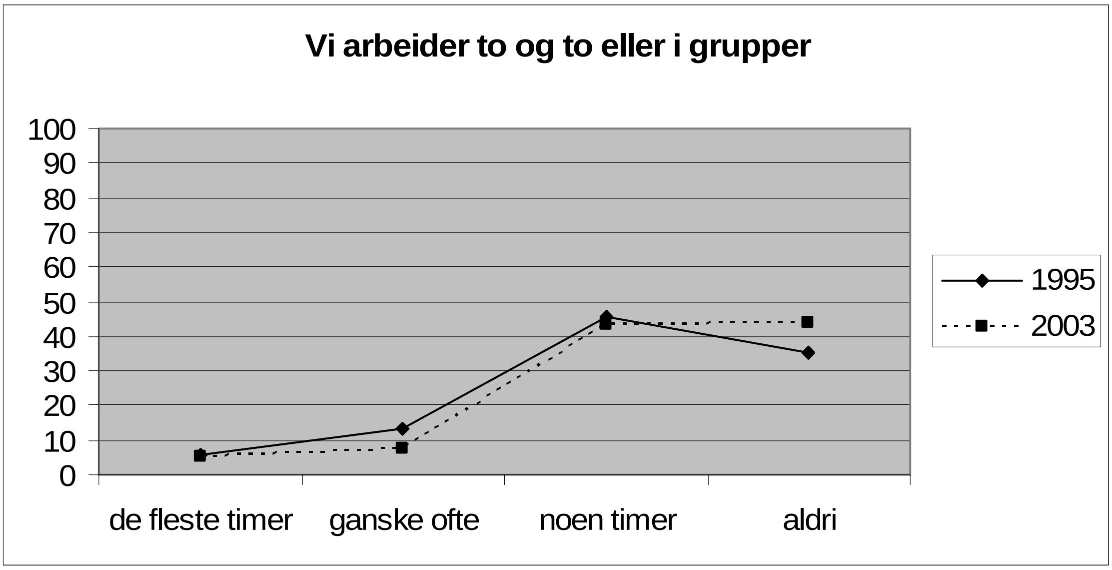
5.5.3 Hva sier de at de holder på med i matematikktimene.

Også her har det vært stilt mange spørsmål i begge undersøkelser, men bare noen er så like at de kan sammenliknes direkte på svarfrekvens. Spørsmålene er interessante i sammenheng med mulige endringer i undervisningsmetoder og organisering av klasser og grupper.



Figur 5.5.4 Individuelt arbeid

Ut fra elevenes tilbakemeldinger, kan det se ut til at det er blitt mye vanligere å arbeide hver for seg med oppgaver i løpet av de åtte årene. Gruppen som aldri gjør det er så å si borte. Dette kan henge sammen med at stadig flere skoler har startet opp med bruk av individuell arbeidsplan og studietid i løpet av samme periode. Generelt har L 97 et sterkere individuelt fokus enn M 87 (se kap 3.2.2).

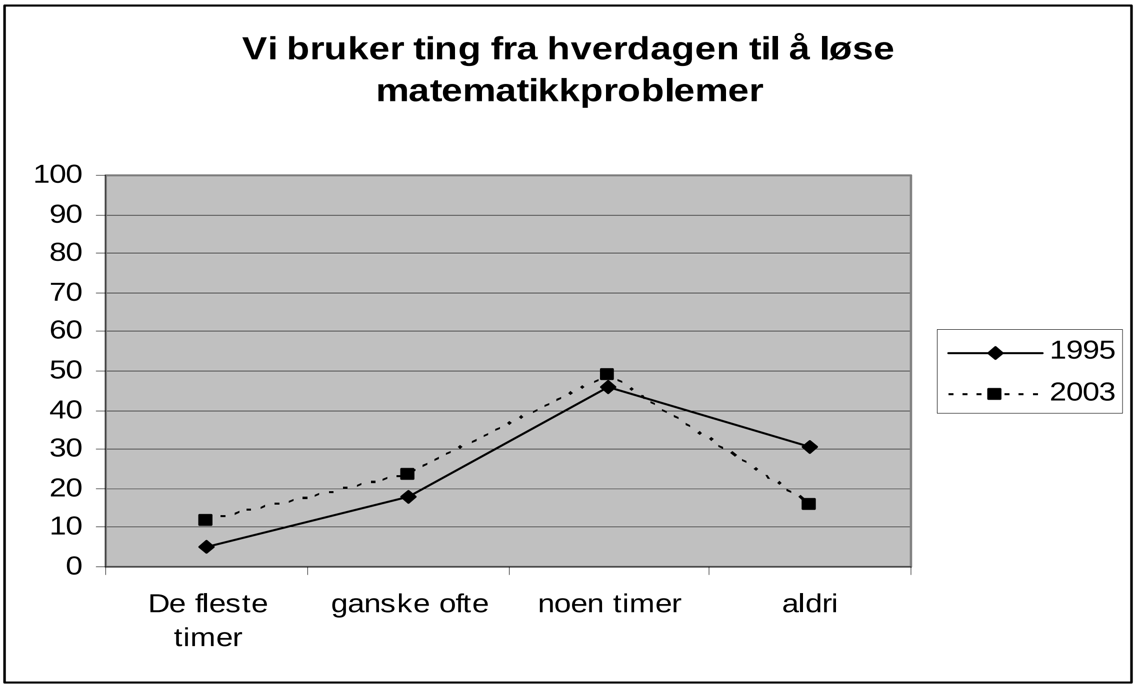


Figur 5.5.5: Gruppearbeid

På spørsmål om de arbeider sammen med andre, ser det ut fra figur 5.1.5 derimot ikke ut til at det har vært noen stor endring, bortsett fra at det er noen flere som sier at de aldri gjør det. Det ser ikke ut til at samarbeid med andre er en hyppig brukt arbeidsform i matematikktimene ut fra disse svarene. Her ble spørsmålene formulert noe ulikt, i 2003 lød det slik: ”Vi arbeider i små grupper”. Dette kan oppfattes noe annerledes. De som arbeider to og to sammen fanges muligens ikke opp av dette spørsmålet.

L 97 vektlegger undersøkende, utprøvende undervisningsmetoder og matematikk i dagliglivet. I den sammenheng kan det være interessant å se på om elevene svarer ulikt i de to undersøkelsene. Begrepet ”knytte matematikk til dagliglivet” ble brukt i spørsmålet i 2003, mens man i 1995 spurte om bruk av ting fra hverdagslivet som hjelp i matematikk.

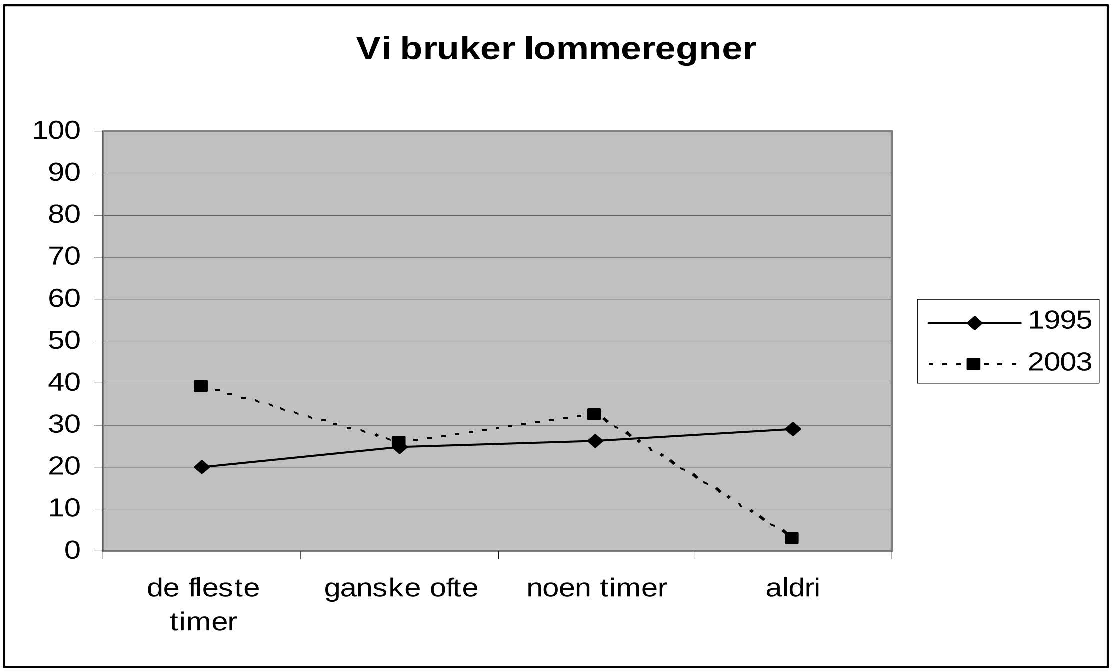
Dette gjør sammenligningen noe tvilsom, men grafene er overraskende sammenfallende med et unntak, det er færre som sier at de aldri knytter matematikk til dagliglivet i 03 enn i 95. Siden den stiplede linjen (2003) i figur 5.5.6 ellers ligger noe over den heltrukne, tyder det på at læreplanens intensjoner har økt denne tilnærmingsmåten til faget noe.



Figur 5.5.6: Matematikk fra dagliglivet

5.5.4 Bruk av tekniske hjelpemidler

Endring i tilgang på tekniske hjelpemidler som kalkulator (lommeregner er den betegnelsen som brukes her) og PC er etter mitt syn av stor interesse. Kan for eksempel ulikheter i regneferdigheter til en viss grad forklares med dette?



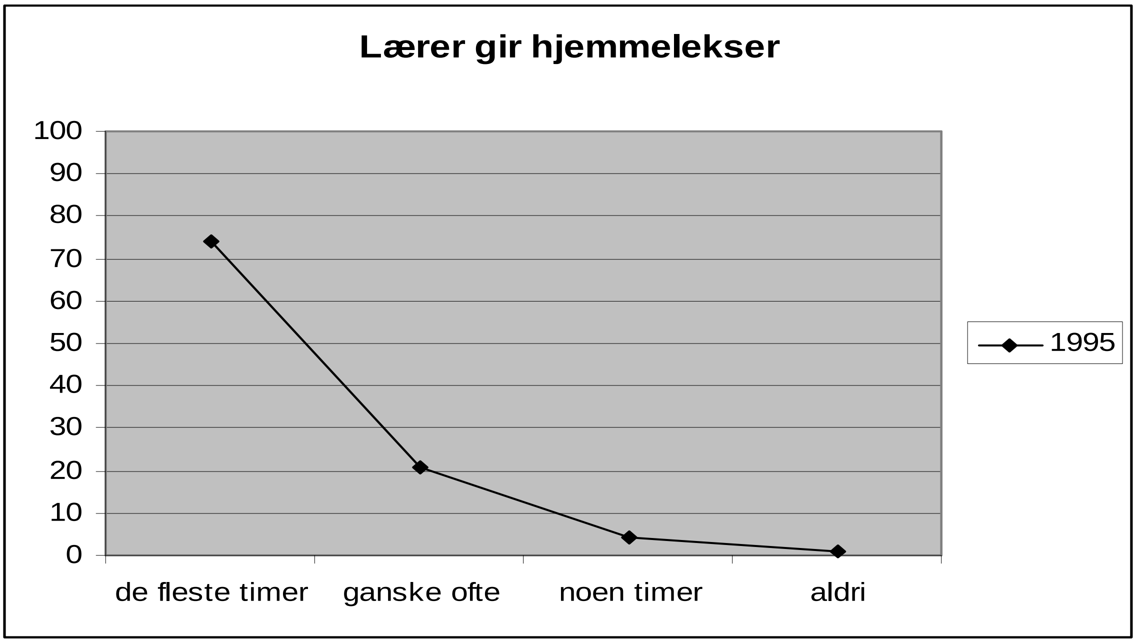
Figur 5.5.7: Kalkulatorbruk

Ikke uventet har kalkulatorbruken økt kraftig i denne perioden. Figur 5.5.7. bekrefter dette. Riktignok overlapper "ganske ofte", " noen timer" har heller ikke endret seg så mye. Det er nesten ingen som aldri bruker kalkulator i 2003. Det er også en økning på 20 prosentpoeng som bruker det hver eller nesten hver time som svaralternativet var i 2003 (se tabell 5.5.1).

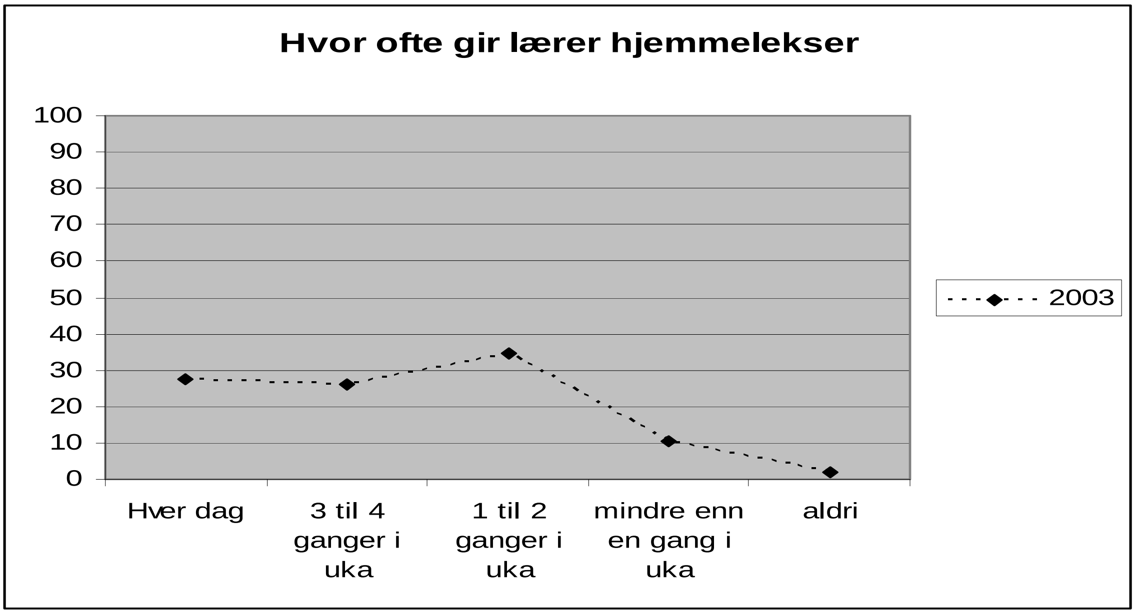
Bruk av kalkulators mulige innvirkning på resultatet av oppgaveanalysen drøftes videre i kap. 6.

5.5.5 Lekser, tilbakemeldinger og prøver

Gode tilbakemeldinger på skriftlige og muntlige arbeider er etter mitt syn viktig. Det har dermed vært interessant å se om elevspørreskjemaet kan si noe om det har vært en utvikling her. I følge Grønmo mfl. (2004) ligger Norge betydelig under det internasjonale gjennomsnittet for sjekking og retting av lekser i 2003. Interessant i denne sammenhengen er selvsagt også hvor ofte de opplever at de får lekser i faget. Spørsmål og svaralternativene var så pass ulike i 1995 og i 2003 at jeg har valgt å vise hver sin graf. Siden begrepet lekser er på veg ut og erstattes med en arbeidsplan, kan det kanskje også forklare eventuelt oppfattet nedgang i matematikklekser.

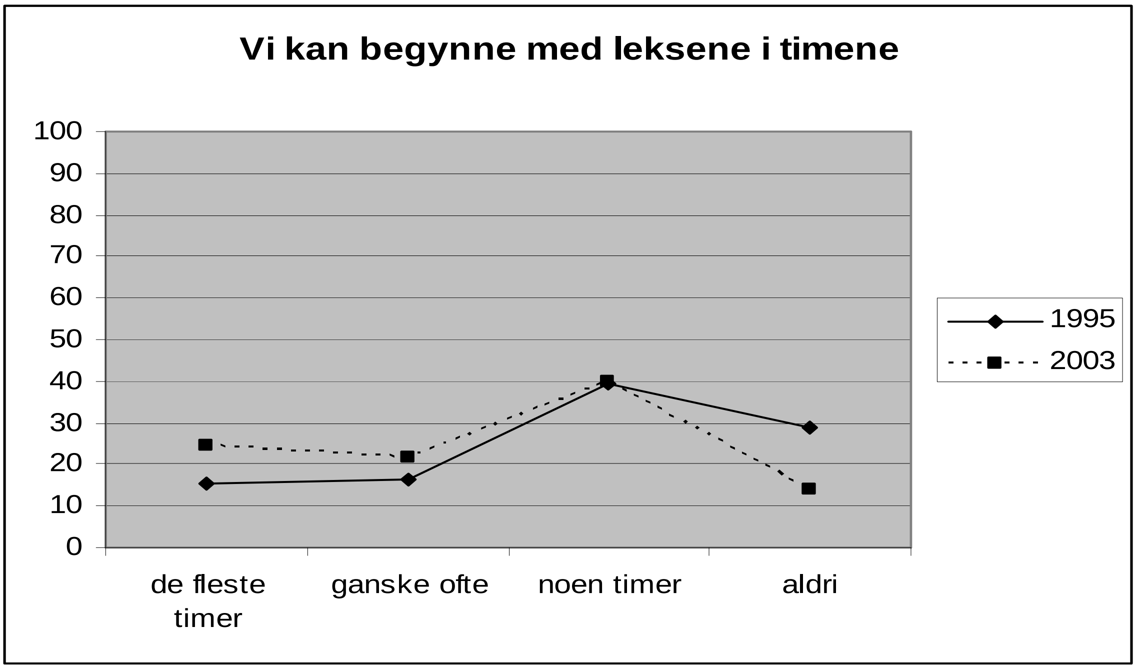


Figur 5.5.8: Hjemmelekser 1995



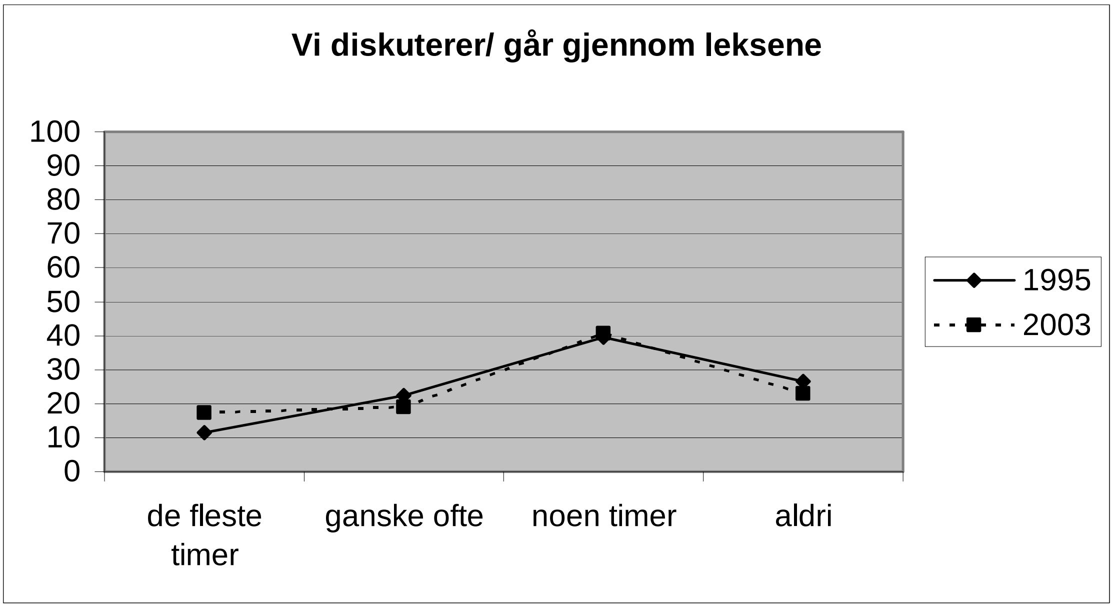
Figur 5.5.9: Hjemmelekser 2003

Siden de ikke nødvendigvis har matematikk hver dag, blir disse vanskelig å tolke. 35 % sier de har matematikklekser 1 til 2 ganger i uken, mens 75 % svarte at de fikk lekse nesten hver time i 1995.



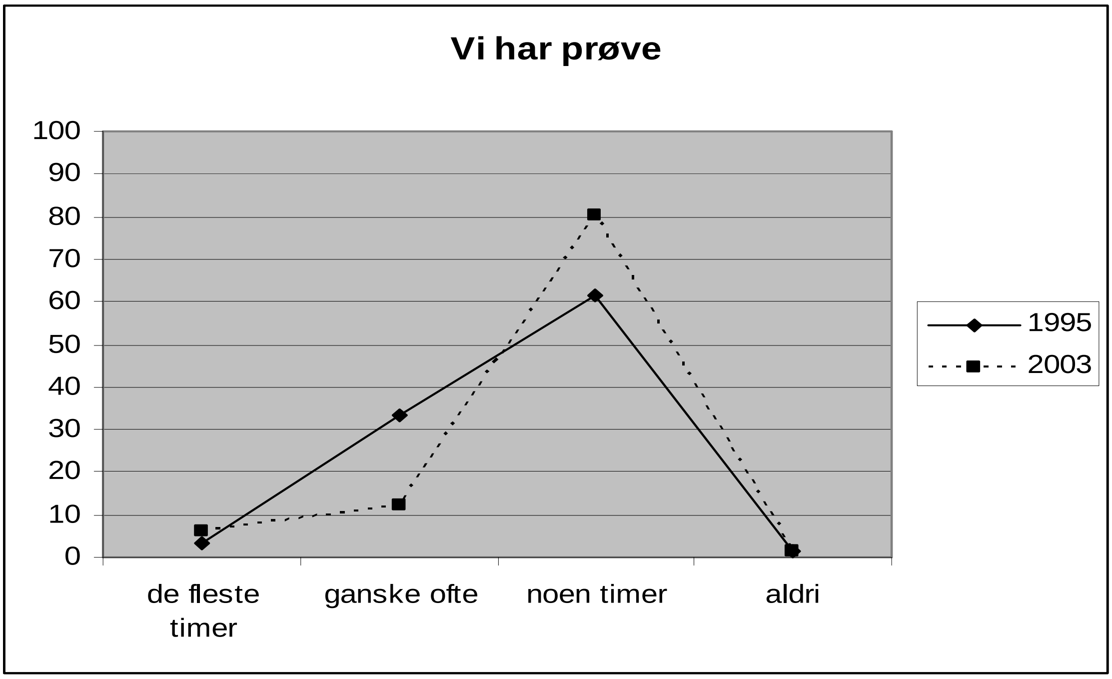
Figur 5.5.10: Hvor og når gjøres lekser

Vi går mot en leksefri skole, mener noen. Studietid betyr at mange av leksene gjøres på skolen. I spørsmålsstillingen er det nok snakk om selve matematikktimene. Figur 5.5.10 viser at flere mener at de kan begynne med leksene i timene i 03 enn i 95. Det er i alle fall betydelig færre som sier at de aldri får begynne. Dette kan igjen også ha noe med hva som oppfattes som lekser å gjøre. Har du en arbeidsplan vil kanskje alt som står der oppfattes som lekser selv om du gjør mye av det på skolen.



Figur 5.5.11: Tilbakemeldinger

Hva gjør man så med leksene? De ser ut fra figur 5.5.11 ikke ut til at gjennomgang av lekser er hyppig i matematikktimene på dette trinnet, hvis vi skal ta elevenes svar på alvor. Riktignok svarer 40 % at det skjer i noen timer, men samtidig svarer hver fjerde elev i begge undersøkelsene at det aldri skjer**.** Manglende oppfølging av lekser ser ut til å være vanlig i norsk skole. Dette kan etter mitt syn ha betydning for resultatene i faget.



Figur 5.5.12: Prøver

Svært få sier at de har prøve de fleste timer. Det kan tyde på at korte lekseprøver brukes lite i norske klasserom. Figur 5.5.12 viser at elevene i 1995 oppfattet at de hadde prøver oftere enn elevene i 2003. Det er betydelig forskjell mellom de to grafene på alternativene ”ganske ofte” og ”noen timer”. Andre vurderingsformer kan ha blitt vanligere. Det er ingen som aldri har prøver.

5.6 Lærerspørsmål

5.6.1 Hva viser tallene for lærerspørsmål

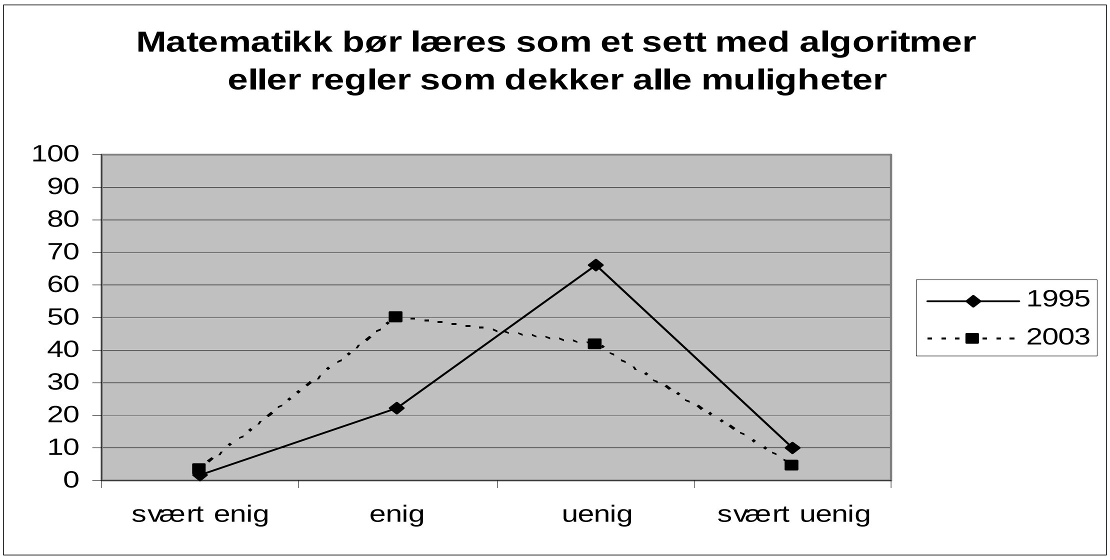
Lærerspørsmålene har vært noe ulike i de to undersøkelsene. Disse har vært stilt til lærerne i de klassene som har deltatt i undersøkelsene. På samme måte som for elevspørsmålene er det noen sammenligningsmuligheter, spesielt på arbeidsmåter, tilbakemeldinger og bruk av lommeregner. Jeg har valgt å skille lærerspørsmålene og elevspørsmålene og sammenlikner dem underveis her under lærerspørsmål. Disse resultatene er med som et grunnlag for ytterligere diskusjon i kapittel 6.

Lærernes (i TIMSS-klassene) alder ser ut til å ha endret seg noe. Litt høyere i 2003 enn i 1995: 36 % mellom 50 og 59 år i 2003 mot 28 % i 1995. Samtidig er det en noe høyere prosentandel i andre enden: 13 % under 29 år i 2003 mot 7,5 % i 1995. I 1995 var over 40 % av lærerne i disse klassene mellom 40 og 49 år. Medianen for antall år i skolen er litt over 19 år i 2003 mot 18 år i 1995. Det viktig å merke seg at elevene i undersøkelsen er i sitt første år på ungdomstrinnet og har fått denne matematikklæreren relativt nylig. Dermed er disse lærernes innflytelse på elevenes prestasjoner relativt liten. Utdanningen til lærerne i 1995 og 2003 er det vanskelig å sammenlikne ut fra gitte spørsmål. Lærerutdanningen har etter hvert blitt over 4 år og alle som har gjennomført denne, har tittelen adjunkt.

5.6.2 Holdninger til faget

Lærernes holdning til matematikkfaget er ikke mindre interessant enn elevenes. Det vil avspeiles i både i valg av undervisningsmetoder og i hvordan matematikkemnene presenteres.

Her fant jeg et spørsmål som kan sammenliknes direkte.

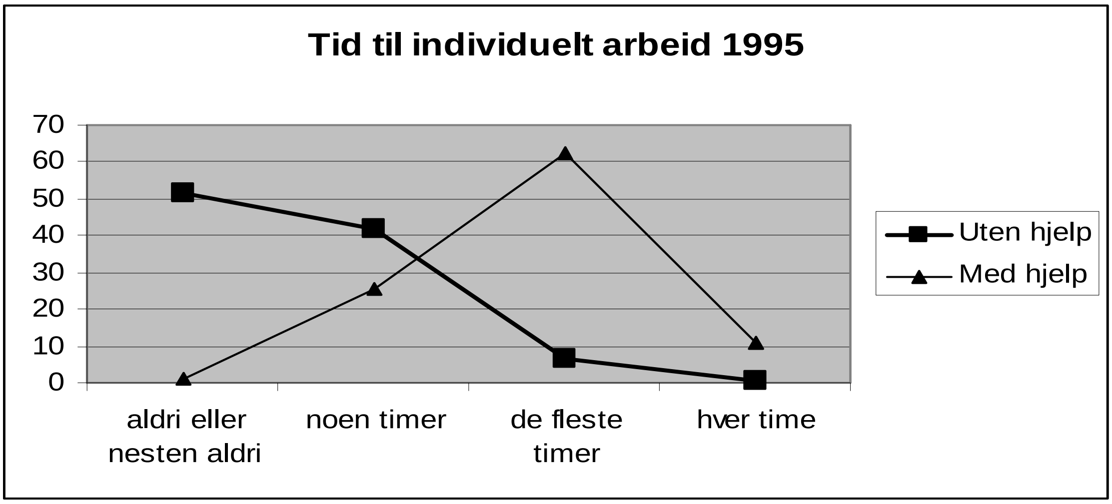


Figur 5.6.1: Et spørsmål knyttet til holdninger

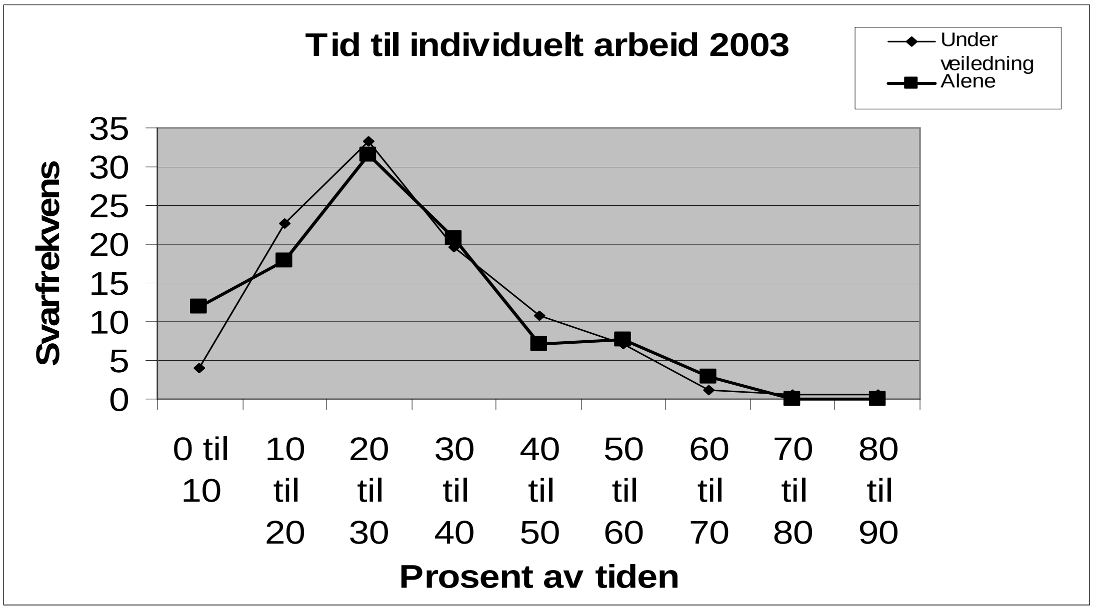
Det kan se ut som det fra 1995 til 2003 er en økende tendens til å se på formell matematikk som viktig. Dette kan synes overraskende sett ut fra intensjoner i de to læreplanene. Forklaringen kan være at strømninger også blant lærene kommer forut for læreplaner og preger disse. I L06 vektlegges nettopp basisferdigheter sterkere igjen.

5.6.3 Hva sier de at de holder på med i matematikktimene.

Nedenfor følger en del figurer som kan si noe om organisering av undervisning og undervisningsmetoder. For å få fram distinksjoner mellom svaralternativene har jeg ikke alltid valgt 100 % som maksimal verdi på frekvensskalaene.

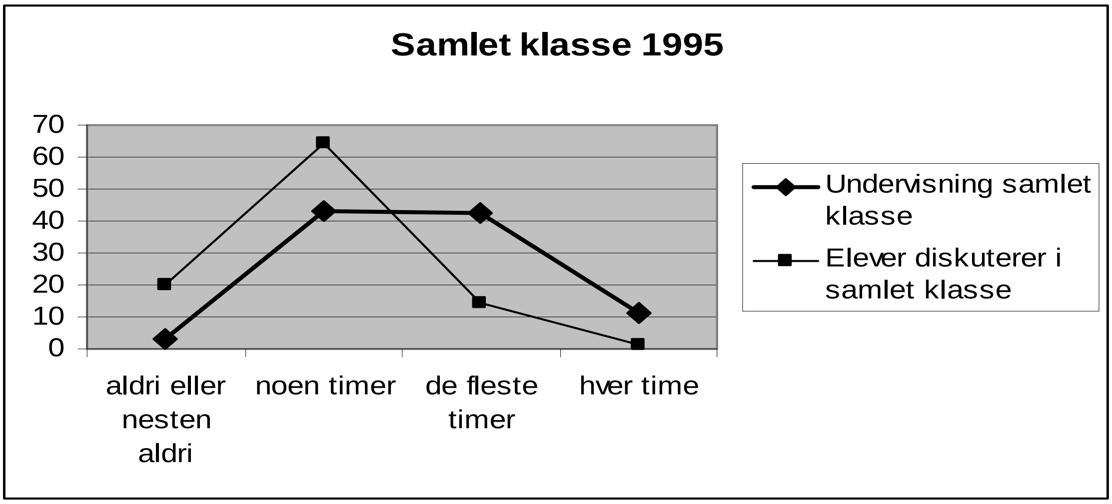


Figur 5.6.2: Individuelt arbeid 1995

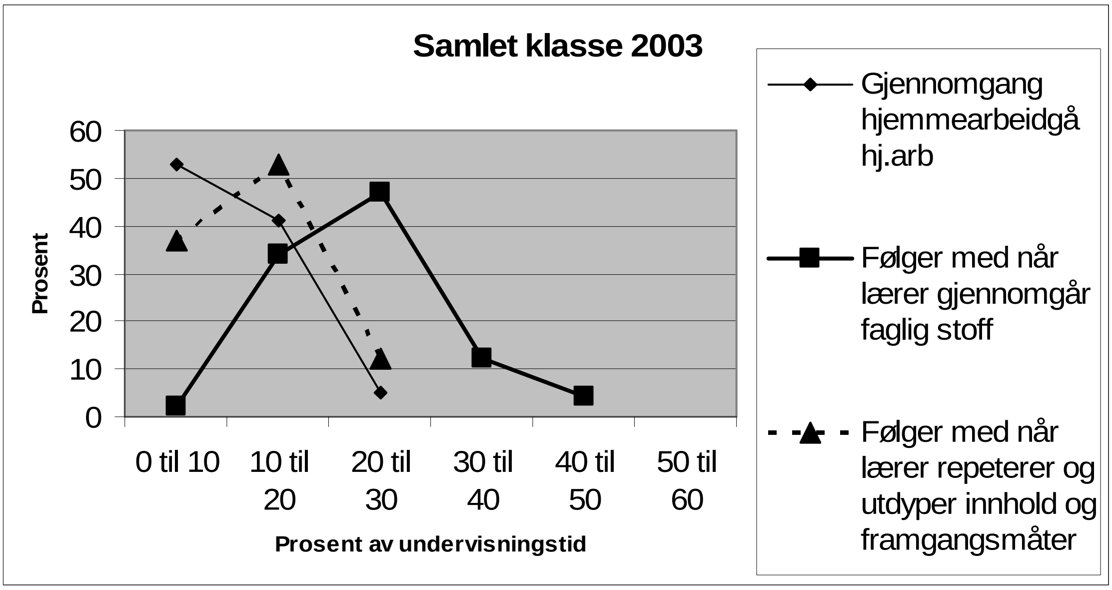


Figur 5.6.3: Individuelt arbeid 2003

Figur 5.6.3 kan tolkes dit hen at tid til individuelt arbeid alene og under veiledning er noenlunde jevnt fordelt i 2003. De kan av figur 5.6.2 se ut til at individuelt arbeid uten hjelp var mindre vanlig i 1995. Det er mulig at ordninger med studietid og individuelle planer igjen avspeiles. Økt bruk av individuelt arbeid som sådan spiller kanskje også en rolle. Siden spørsmålsformuleringene er så ulike, er det vanskelig å se noen bekreftelse på om tiden til individuelt arbeid har økt slik elevsvarene tyder på (se kap 5.5.3). Det samme problemet gjelder spørsmål knyttet til undervisningsformer i samlet klasse.



Figur 5.6.4: Helklasse i 1995

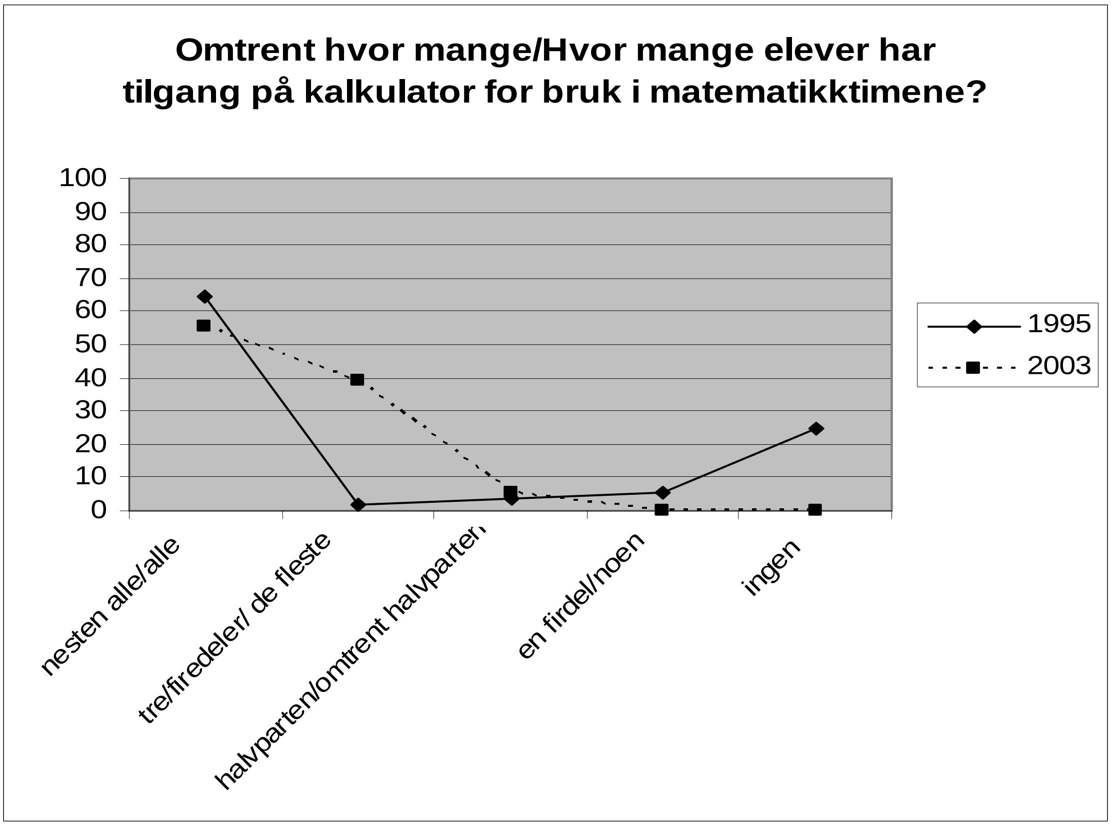


Figur 5.6.5: Helklasse i 2003

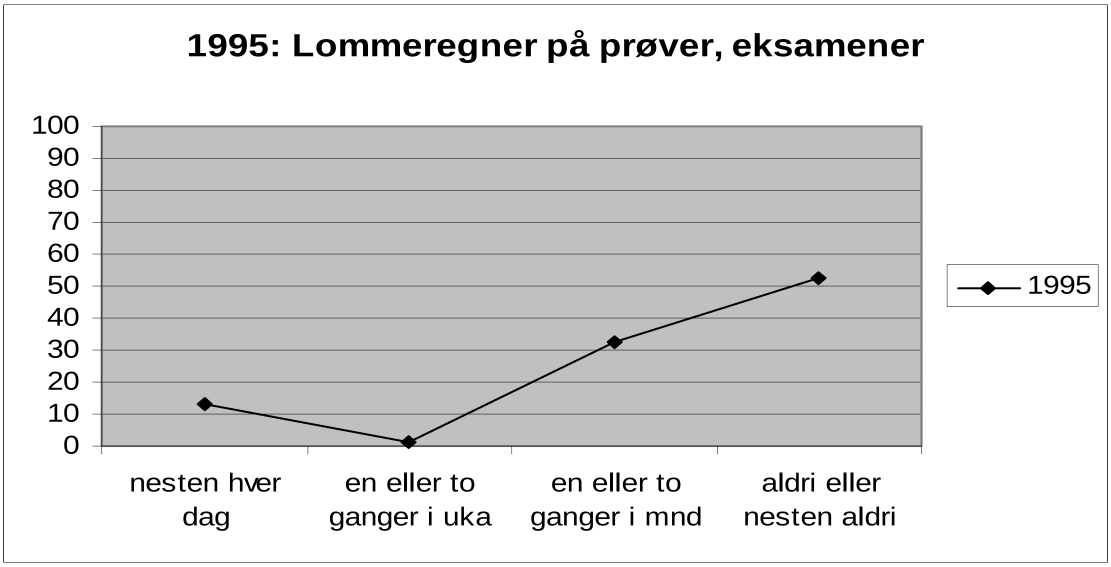
De to figurene over (5.6.4 og 5.6.5) viser at undervisning i samlet klasse ser ut til å være vanlig en del av tiden begge år. Det virker som dette er lærerstyrt, 20 % av lærerne i 1995 har for eksempel aldri elevdiskusjoner i samlet klasse. Tilsvarende tall for 2003 finnes ikke. Andre undersøkelser (Klette 2004) viser at helklassesamtalen er på vei bort i norsk skole. Dette kan ha sammenheng med at fokus er flyttet fra undervisning til læring og at helklassesamtalen oppfattes som undervisning. Dette drøftes nærmere i kap. 6.

5.6.4 Bruk av tekniske hjelpemidler

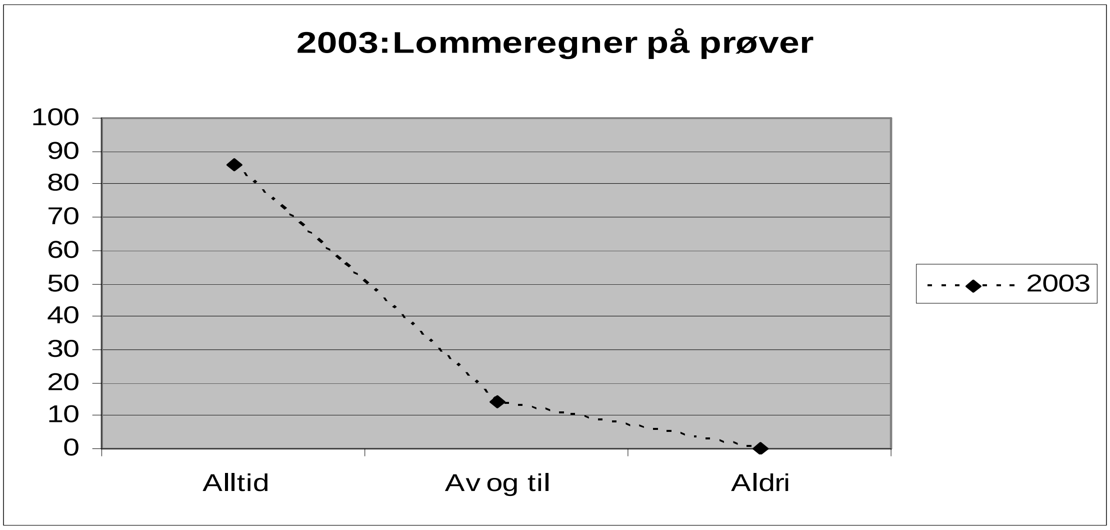
Det har vært stilt mange spørsmål til lærerne vedrørende elevers bruk av kalkulator. Har sett nærmere på tre av dem her. Figur 5.6.6, 5.6.7 og 5.6.8 bekrefter inntrykket fra elevspørreskjemaet om at bruken av kalkulator har økt fra 1995 til 2003. I det første spørsmålene har svaralternativene vært ulike, 1995 ramses opp først.



Figur 5.6.6: Tilgang på kalkulator



Figur 5.6.7: Kalkulator i prøvesituasjoner 1995

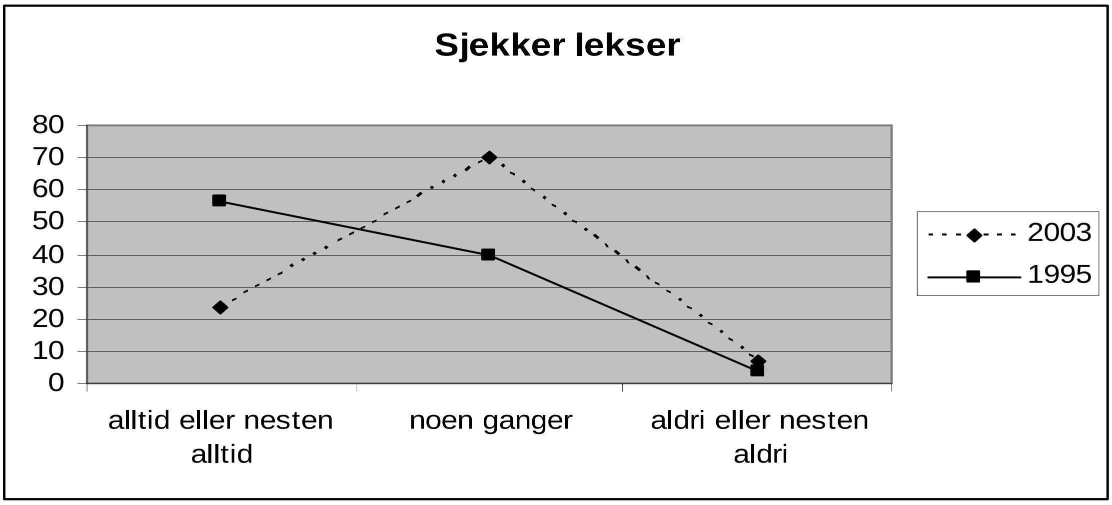


Figur 5.6.8: Kalkulator i prøvesituasjoner 2003

Når det gjelder tilgang til kalkulator på prøver, bekreftes det elevundersøkelsen viser om at det har blitt mye vanligere. I 2003 får nærmere 90 % av elevene alltid bruke det, mens det i 1995 var over 50 % som aldri eller nesten aldri fikk bruke det. Når det gjelder TIMSS-undersøkelsene kunne ikke kalkulator brukes i 1995, mens del 2 kunne besvares med kalkulator i 2003. Figur 5.6.7 og 5.6.8 viser at å løse oppgaver uten kalkulator er uvant for elevene i 2003, noe som kan ha betydning for endring i resultater.

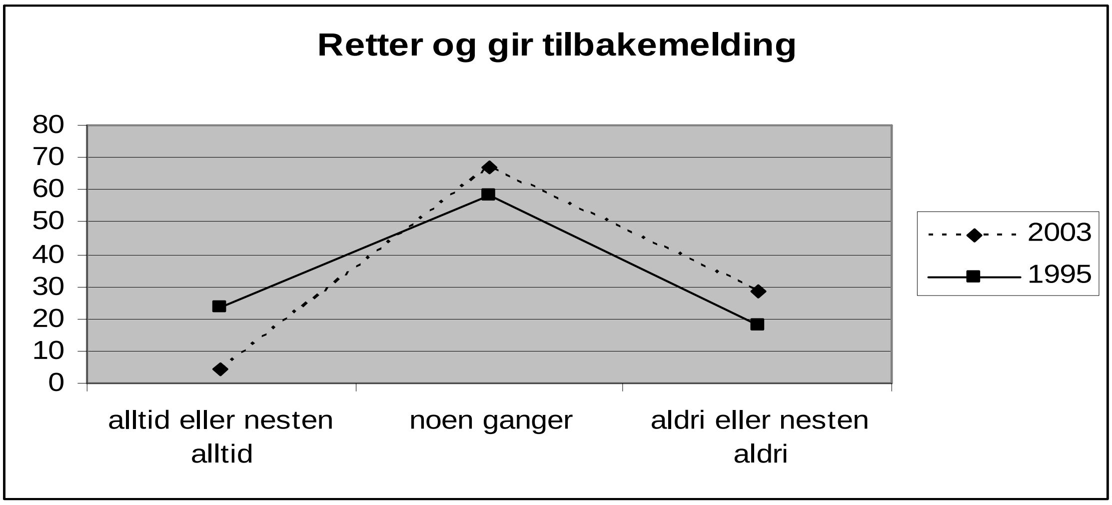
5.6.5 Lekser og tilbakemeldinger

Svarene i elevundersøkelsen tyder på at det er mange elever som opplever å få lite tilbakemeldinger på det de gjør. Jeg har funnet noen spørsmål i lærerundersøkelsen som belyser det samme. Figurene 5.6.9, 5.6.10 og 5.6.11 sier noe om oppfølgingen av hjemmearbeidet. Her har jeg slått sammen ”aldri” og ”sjelden” fra 1995 til ”aldri eller nesten aldri”. Jeg har også endret ”alltid” fra 1995 til ”alltid eller nesten alltid”. Siden slike begreper betyr noe for hvor folk krysser av, bør disse grafene ses i lys av noe større usikkerhet enn ellers.



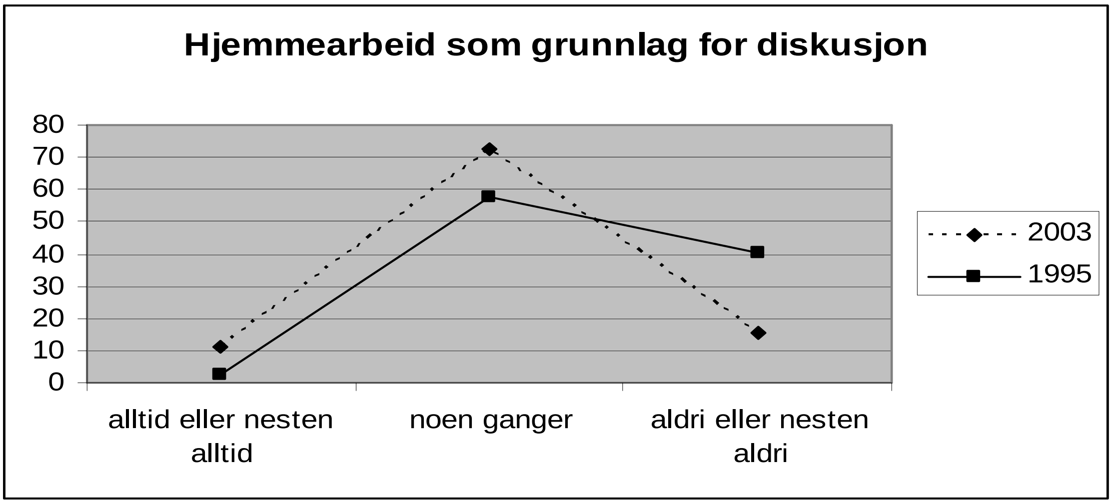
Figur 5.6.9: Leksekontroll

Her er det viktig å huske at i 1995 var alternativet ”alltid” det første alternativet. Det understreker at leksesjekking antageligvis var vanligere da enn i 2003. Det er etter mitt syn i så fall en uheldig tendens. Alle liker å få oppfølging på det de gjør, dessuten blir leksene tatt mer alvorlig av elevene hvis de vet at det blir notert at de er gjort.



Figur 5.6.10: Tilbakemeldinger

Figur 5.6.10 viser en noe større tendens til å gi tilbakemeldinger på hjemmearbeid i 1995 enn i 2003. Når det kommer til diskusjon av hjemmearbeid (figur 5.6.11) ser det ut til at det foregår noe hyppigere i 2003 enn i 1995. Dette er i så fall tegn på en positiv utvikling. Læreplanenes vektlegging av samtale kan ha hatt betydning.



Figur 5.6.11: Gjennomgang av lekser

6. Mulige forklaringer på den negative utviklingen

I dette kapitlet vil jeg forsøke å se resultatene fra oppgaveanalysen og resultatene fra lærer- og elevspørsmål i kap. 5 i sammenheng med innledende teorikapitler og læreplangjennomgang for å diskutere mulige forklaringer på utviklingen. Mesteparten av mine funn kommer fra oppgaveanalysen. Jeg vil starte diskusjonen med dette som utgangspunkt.

6.1 Hva viser oppgaveanalysen?

I kapittel 5.2 og 5.3 har jeg analysert oppgave for oppgave med oppsummering i kap.5.4. Resultatene mine samsvarer med rapporten for TIMSS 2003 der man også har kommentert trender fra 1995 (Grønmo mfl. 2004). Jeg har gått dypere inn på et utvalg av oppgavene og finner tilsvarende tendens. PISA 2003 viser også noe av samme tendens, men der foreligger det tall over en kortere periode (Kjærnsli mfl. 2004). Også undersøkelser foretatt av Norsk Matematikkråd (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2006) bekrefter en nedgang i matematikkunnskaper de senere år.

Det er klare sammenhenger mellom god tallforståelse og all videre matematikk. Et vanskelig område som proporsjonalitet og forhold, avhenger av kunnskaper om multiplikative strukturer (se kap. 2.3.4 og kap. 2.3.7). Den samme forståelsen er et viktig grunnlag i algebra. Derfor er det betenkelig at elevene viser dårligere kunnskaper innenfor tall og tallregning, proporsjonalitet og forhold i 2003 enn i 1995. Elevenes prestasjoner i algebra kan for en stor del forklares med intensjoner i norske læreplaner. Særlig toner L 97 ned arbeid med algebra fram mot 8. klasse. Spesielt gjelder dette formell algebrasyntaks, ligningsløsning og lignende (se kap. 3.2.4). Det samme kan være noe av forklaringen på resultatet for tallregning. Formelle strategier for tallregning vektlegges heller ikke så sterkt som i tidligere læreplaner. Nedgangen jeg finner innen tallregning er størst for desimaltall (se kap. 5.2.4). Tilsvarende nedgang for desimaltall ses også i kategorien tallstørrelser (se kap. 5.2.3). Man skulle kanskje tro at økt bruk av kalkulator skulle gjøre desimaltall mer kjent. Samtidig kan det bety at de slipper å regne med desimaltall uten kalkulator og dermed ikke mestrer dette når dette hjelpemidlet ikke er tilgjengelig.

For brøkregning er ikke endringen stor, men resultatene dårlige (se kap. 5.2.4). Tradisjonell brøkregning med mekanisk regning av ferdigoppstilte brøker er tonet ned i norske læreplaner, særlig etter L 97 (Brekke mfl.1998). Det sies at det er vanskelig å finne konkrete situasjoner der denne kunnskapen er nyttig og dette brukes som argument mot å arbeide med det. Så kan man spørre seg om ikke kunnskap om å legge sammen for eksempel en halv og en fjerdedel faktisk er nødvendig og et tegn på et godt utviklet brøkbegrep. Forståelse for nødvendighet av felles nevner er etter mitt syn ikke vanskelig å illustrere. At elevene så arbeider med ferdigoppstilte oppgaver i tillegg for å konsolidere regnekunnskapen anser jeg som nødvendig. I videregående skole er kunnskaper om brøkregning viktig i mange sammenhenger. Brøkbegrepet testes i alle mine kategorier innenfor tall. Andelsbegrepet står noe sterkere enn begreper som proporsjonalitet og tallstørrelse. Det er også det brøkbegrepet det sannsynligvis arbeides mest med fram mot ungdomstrinnet og som dermed er mest familiært (se kap. 3.2.4).

Utforskning av tallmønstre som trening på generalisering er en trend, men det synes ikke på resultatene (se kap. 5.3.2). En forklaring er at disse oppgavene også avslører mangelfull tallforståelse. Hvis det har vært en nedgang i tallkunnskaper vil dette slå ut på all matematikk. At norske elever gjør det best i datarepresentasjon (Grønmo mfl. 2004) er etter min oppfatning ikke spesielt beroligende. Denne typen matematikk har relativt liten overføringsverdi til andre deler av faget med unntak av funksjonslære. Dette kan være en mulig forklaring på at det ikke er noen særlig endring innen oppgavekategorien funksjoner (se kap. 5.3.4). Ifølge Gardiner (2004) har arbeid med denne typen matematikk i England de siste 15 år mislyktes i å redusere antall ukyndige innen emnet statistikk i befolkningen og heller ikke økt interessen for emnet.

6.2 Hovedområder med betydning for matematikkopplæring.

Etter min oppfatning er det mange ulike aspekter som spiller inn som mulig forklaring på norske elevers prestasjoner i matematikk. Viktige årsakssammenhenger er knyttet til organisering av undervisning. Arbeider elevene individuelt eller i grupper? Den senere tids forsøk på endring av lærerrollen fra formidler til veileder kan ha noe å si. Lærernes utdanning i og interesse for matematikk er viktig. Det snakkes mye om endring i elevrolle også, fra lærerstyrt undervisning til elevstyrt læring som ytterpunkter. Matematikkfaglig er spørsmål knyttet til hva som anses viktigst, prosessen frem mot produktet, selve produktet eller begge deler. Finnes en passelig balanse mellom arbeid med ferdigheter og arbeid med forståelse? Samfunnets begrunnelse for matematikkopplæring er viktig. Ikke minst er de ulike aktørene i skolen og deres syn på faget interessant.

Som nevnt i kap. 2.1.4 er ikke læringsteoriene i seg selv opplæringsoppskrifter, men de avspeiles hele tiden i ulike trender. Hva sier læreplanen? I hvilken grad blir den gjennomført i skolen?

6.2.1 Organisering av undervisning, lærerrolle og elevrolle

Lærere beskyldes ofte for å være konservative i den forstand at de arbeider som de alltid har gjort (se kap. 3.1.2). Ikke minst eksisterer det en tese om at lærerstyrt helklassesamtale er betegnende for klasseromsarbeidet (Klette 2004). I følge Klette viser nyere studier at denne arbeidsformen ikke lenger er dominerende. Snarere brukes det lite tid til dette, særlig på barnetrinnet (Klette 2004). Funn av at elevene bruker mye tid på individuelt arbeid, gjenspeiles også i elevsvarene i TIMSS-undersøkelsen for 2003 (se også Grønmo mfl. 2004). I 1995 svarer litt over 20 % av mine elevrespondenter at de svært ofte arbeider individuelt med oppgaver, mens 43 % svarer det samme i 2003 (se kap. 5.5.3). I følge Klette har det vært en forskyvning fra helklasseaktiviteter med plenumsgjennomgang av lærestoff som hyppigste arbeidsform på 70 – tallet mot mer individuell oppgavejobbing på 90-tallet. Helklassesamtalen nevnes som arbeidsmåte i M 87 (se kap. 3.2.2). Hvis vi skal tro på elevsvarene i TIMSS kan det synes som denne utviklingen har akselerert på slutten av 90-tallet (se kap. 5.5.3). Lærersvarene er ikke så lette å tolke med henblikk på tid til helklassesamtale(se kap. 5.6.3). Tid til individuelt arbeid alene, uten hjelp, ser i følge lærerne ut til å være mer vanlig i 2003. Denne tendensen kan etter mitt syn til en viss grad ses i sammenheng med konstruktivismens subjektive kunnskapssyn (se kap. 2.1.2). Dette kan også ha sammenheng med økt bevissthet fra midten av 80-tallet rundt det at læring og undervisning ikke er det samme (Braathe & Ongstad, 2001). Forskjeller i ordbruk mellom M 87 og L 97 avspeiler dette (se kap. 3.2.2)

Utviklingen har gått via måneds/ukeplaner for hele klasser fra begynnelsen av 80-tallet til dagens individuelle arbeidsplaner. Det siste er et kjennetegn ved såkalt *AFEL*-pedagogikk. AFEL = *ansvar for egen læring*. Dette kan etter min oppfatning være et forsøk på å møte flere utfordringer, jeg vil trekke fram spesielt to: *tilpasset opplæring* gjennom at hver enkelt elev har sin arbeidsplan og *elevstyring/ansvar* ved at eleven selv må be om veiledning og tas med på råd ved utforming av planene. Den autonome elev, elevstyring og elevinnflytelse henger også sammen med vår tids fokus på barns rettigheter. Dette kan knyttes til den kognitive konstruktivismen (Säljö 2000, kap. 2.1.4). Sosiokulturelle strømninger ses i den økende bruk av prosjekter, temauker og i nye evalueringsformer som respons underveis i prosessen, loggføring og lignende (se kap. 3.2.2). L 97 er etter mitt syn farget av begge disse strømningene.

Tverrfaglige prosjekter inneholder ikke nødvendigvis noe særlig matematikk. I den grad matematikklærere legger opp undervisningen som de alltid har gjort, skjer dette sannsynligvis i færre timer enn tidligere siden mye tid settes av til individuell studietid og prosjekter. Denne endringen fra 1995 til 2003 i hva tiden brukes til kan muligens forklare noe av den negative utviklingen. Forskjellen på individuell studietid og individuelt arbeid med oppgaver i mer tradisjonell forstand, er at elevene kan velge tidspunkt for oppgaveløsingen selv, det kan være større ulikhet i hvilke oppgaver hver enkelt elev skal regne og eleven må selv ta ansvar for å be om hjelp fra lærer. Spørreskjemaene (se kap. 5.5 og kap. 5.6) skiller ikke klart mellom disse formene, men det kommer fram at individuell jobbing uten hjelp ser ut til å ha blitt vanligere (se kap 5.6.3). I tillegg er mitt personlige inntrykk at det går med mye tid til fysisk forflytning av elevene mellom ulike aktiviteter. Skolen pålegges også stadig flere oppgaver uten at det nødvendigvis tildeles flere timer.

Det finnes etter mitt syn motsetninger mellom arbeidsplan/studietid-trenden og aktuelle sosiokulturelle læringsteorier og sosialkonstruktivismen (se kap. 2.1.3). Betydningen av samtalen, det å snakke matematikk i en gruppe, det å sikre fellesforståelse for matematiske begreper gjennom en aktiv diskurs kan være praktisk vanskelig når elevene har relativt store deler av skoledagen til egen arbeidsplan hvor det viktigste lett blir å hake av for hvilke oppgaver som er gjort. Elevene vil også, og det er intensjonen, arbeide på samme tidspunkt med ulike emner og fag, slik at en felles strukturering ikke alltid er praktisk mulig å få til (se kap. 5.6.3). Individuelt arbeid på denne måten krever dessuten tett oppfølging i form av hyppige tilbakemeldinger, noe norsk skole ikke ser ut til å vektlegge nok (Grønmo mfl. 2004). Lærer og elevsvar bekrefter dette (se kap. 5.5.5 og kap. 5.6.5). Både L 97 og M 87 fremhever samtalen som viktig i matematikkopplæringen (se kap. 3.2.2).

I M 87 står det fortsatt noe om at lærer skal forklare og vise, en form for lærerrolle som er nedtonet i L 97 (se kap. 3.2.2). Selv om intensjonene med dette er de beste kan det etter mitt syn slå uheldig ut. Lærer er (eller bør være) innehaver av de matematikkunnskaper samfunnet ønsker at neste generasjon skal inneha (Ernest 1998, Björkqvist 1993, se kap. 2.1.3). Det er heller ikke opplagt at elevaktivitet trenger å være fysisk, ”gjøring” kan også foregå ved at de lytter til andre eller ser på hva andre gjør (Ernest 2004, se kap.2.1.4) Veilederrollen, som også er en viktig del av lærerrollen, forutsetter en faglig sterk lærer som ikke ligger en lekse foran i læreboka. Lærer kan ikke forberede seg i et bestemt tema til disse timene, og må således være sikker på alle læringsmål i faget. Det er heller ikke mulig å se helt bort fra at veilederrollen og AFEL-pedagogikken er blitt positivt fremhevet av ulike skolemyndigheter fordi det ligger muligheter for å spare penger her (Braathe & Ongstad 2001).

6.2.2 Lærerutdanning

Thompson og Saldanha (2003) refererer til Post mfl. (1991) og omtaler en undersøkelse av kunnskaper hos lærere.

> *"Vårt resultat indikerer at det er et problem på flere nivåer. Først og fremst det faktum at mange lærere simpelthen ikke kan nok matematikk. Dernest at bare en minoritet av de lærerne som greier å løse disse problemene korrekt, var i stand til å forklare sine løsninger på en pedagogisk akseptabel måte. (Post mfl.., 1991, s. 195)".* (Thompson og Saldanha 2003, s. 96, min oversettelse).

Det er grunn til å stille spørsmål om ikke denne problematikken kan være aktuell i dagens norske skole også. Vi har allmennlæreren som kan undervise i alle fag i grunnskolen. Først i 1992 ble fordypning i matematikk obligatorisk i almennlærerutdanningen (Braathe & Ongstad 2001). Inntakskravet er generell studiekompetanse. Dette betyr at mange ikke har mer matematikk i sin utdannelse enn 1. klasse på videregående skole. Det viser at det er sannsynlig at det på barnetrinnet undervises i matematikk av lærere som selv har valgt bort faget ved første mulighet. Oversikt over utdanningsnivå blant norske matematikklærere finnes i rapporten "Kompetanse i grunnskolen, Hovedresultater 1999/2000". Blant de eldste lærerne på barnetrinnet (fra 45 år og oppover) har over 50 % mindre enn 5 vekttall utdannelse i matematikk. Blant de aller yngste lærerne (under 35 år) har flertallet mellom 5 og 10 vekttall (Lagerström 2000). Dette skyldes at faget har blitt obligatorisk ved lærerutdanningen. På ungdomstrinnet er utdanningsnivået noe høyere. Her finnes også universitetsutdannede lærere. De gruppene som kommer dårligst ut når det gjelder utdannelse er gruppene 35 til 44 år og 45 til 54 år (Lagerström 2000). Det er i denne aldersgruppen flertallet av lærerne befinner seg. Norske lærere i 8. klasse har i mindre grad fordypning i matematikk enn lærere i andre land i TIMSS-undersøkelsen (Grønmo mfl. 2004).

Underviser man i fag uten spesiell utdannelse vil man lettere være avhengig av læreboken. Mangler læreren fagkunnskap i matematikk, vil vedkommende også kunne mangle bakgrunnskunnskaper for å vurdere og å ta til seg strømninger i tiden på en klok måte. Det samme kan gjelde fortolkning av gjeldende læreplan. Dessuten forventes det naturligvis at lærerne er lojale mot sentrale og lokale skolepolitikere og skoleledere og mot disses fortolkning av læreplaner og opplæringslov. Disse kan også mangle kunnskaper om matematikk og matematikkdidaktikk. I tillegg har de budsjetter å ta hensyn til. Ideer som å skru ned tavlen eller at lærere helt skal slutte å undervise og bare veilede er eksempler på at strømninger overdrives. At lærere preges av tendenser i tiden, ses også i endring i holdning til matematikkfaget (se kap. 5.6.2).

Matematikk har tradisjonelt vært oppfattet som et maskulint fag. Økt innflytelse fra kvinner i samfunn og skole, kan tenkes å ha betydning for synet på matematikk og matematikkopplæring.

Jakten på "metoden med stor M" har de senere år resultert i vektlegging av prosjektarbeid. Prosjektarbeid er etter mitt syn en god opplæringsmetode i mange sammenhenger, også i matematikk, og ikke bare i praktisk anvendt matematikk. Samtidig er det en metode som krever mye tid og god planlegging og som ikke egner seg så godt til for eksempel ferdighetstrening. En tendens til å mene at alle skolefag kan undervises etter helt like metoder har etter min oppfatning til en viss grad vært fremherskende. Dette er nesten en forutsetning for tanken om en almennlærer kvalifisert for hele grunnskolen i alle fag. Kanskje er det sånn at arbeidsformer som er nyttige og virkningsfulle i et fag ikke er like gode i et annet fag. Fagdidaktikk er etter mitt syn nært knyttet til faget. Samtidig er det viktig å være bevisst at det ikke eksisterer vanntette skott her og at det er mange undervisningsideer å hente fra andre fagfelt.

6.2.3 Elevrolle

Moderne pedagogikk forutsetter at elevene innehar en ubegrenset lyst til å lære alt mulig (Säljö 2000, se kap. 2.1.4). Å skape undring hos elevene, å la dem utforske sammenhenger og selv formulere problemstillinger og resultater er vektlagt, blant annet i L 97 (se kap. 3.2.2). Tanken kan være å gi elevene et eierforhold til kunnskapen og glede ved å søke ny kunnskap. Samtidig vises en fallende tendens når det gjelder å like faget matematikk (se kap. 5.5.2). Troen på betydning av matematikk for framtidig karriere har også avtatt litt (se kap. 5.5.2). Det kan være flere grunner til dette, hva barn interesserer seg for avhenger av mange forhold som skolen ikke har innflytelse over. Dagens unge søker seg ikke nødvendigvis til de samme yrker som foreldregenerasjonen.

I virkeligheten vil det i alltid være en del av elevene som ikke er like interessert i og har like stort talent for de fag og emner som det skal arbeides med i skolen. I fritiden er barn flinke til å stå på for å bli bedre. Bare se på aktiviteter som fotball, ridning, dataspill eller gitarspilling. Ikke alle elever er dermed like ”selvdrevne” og greier å bruke for eksempel studietid effektivt. Læring innebærer å måtte gå gjennom ideer på nytt, prøve ting ut, leke med det og bruke det (Bencze 2004). Å arbeide grundig, å måtte slite litt for å få det til gir stor tilfredsstillelse på lengre sikt, men kan oppfattes som traurig underveis (Sfard 1991, se kap. 2.2.1). Dette kan komme i konflikt med ønsket om at elevene skal trives på skolen, at de ikke skal kjede seg. Samtidig legger læreplanene til en viss grad opp til å bremse de som har lyst til å lære (L 97, se kap. 3.2.1). Hvis vi leser L 97 ser vi at det for eksempel foreslås hvor langt man skal gå i multiplikasjon i 3. klasse.

I et postmoderne samfunn er det ikke lenger snakk om at noe nødvendigvis har mer verdi enn noe annet (se kap. 2.1.2). I skolen kan dette resultere i økt valgfrihet også i faglig innhold. At elever og lærere er likeverdige kan tolkes til at de skal være likestilte i innflytelsen på hva som skal læres. Det vil sannsynligvis være lettere for elever som kommer fra akademiske hjem å foreta fornuftige valg enn for elever med foreldre som står kulturelt lenger fra skolesamfunnet. Dette vil i neste omgang kunne øke forskjellene i resultater knyttet til sosial og kulturell bakgrunn. TIMSS 2003 viser en svak tendens til at denne forskjellen har økt (Grønmo mfl. 2004). Økt bruk av vurderingsformer knyttet til hjemmearbeider/hjemmeprøver kan muligens også tenkes å være med å forstørre denne forskjellen.

Gardiner (2004) er inne på det han kaller ”consumer democracy” i tilknytning til sosiale endringer. Her har kunden, les eleven, alltid rett uansett vedkommendes manglende kunnskaper. I en slik verden er det ifølge ham ikke lenger plass til tradisjonell undervisning og det kan ikke eksistere noe slikt som ”matematikk”. Slik jeg tolker ham, er dette med på å skape grobunn for de som ønsker at det skal undervises i mathematical literacy (Gardiner 2004, se kap. 3.2.2)

6.2.4 Samfunn kontra individ

Min erfaring er at ønsket om å arbeide med realistisk matematikk enkelte ganger kan komme i konflikt med å se sammenhenger mellom ulike matematikkemner (se kap. 3.2.2). I yrkesfaglig opplæring vil man gjerne integrere matematikken i studieretningsfagene for å gjøre faget mer realistisk og øke motivasjonen. Dette er selvsagt en god tanke, men samtidig er dessverre ofte ikke rekkefølgen på matematikkemnene som trengs i en naturlig framdrift i et studieretningsfag analog med tilsvarende rekkefølge for å forstå matematikken som trengs. Matematikk bygger også på annen matematikk (Sfard 1991, se kap. 2.2.1, Gravemeijer & van Galen 2003, se kap. 2.3.6). Spørsmålet blir om målet med matematikkundervisningen kun er nytten i forhold til andre fag, eller om matematikken i seg selv har en verdi ut over det (Thorpe 1989, se kap 2.4.5). Er svaret ja på det første, vil noen si at det ikke er så farlig at det ikke er sammenheng i selve matematikken. Det viktigste blir å kunne bruke matematikk som en ren oppskrift der og da. Samtidig kommer dette igjen i konflikt med tanken om livslang læring, endringskompetanse, forståelse og fleksibilitet.

Dagens barn møter en annen matematikk i hverdagslivet enn foreldrene gjorde. Kassaapparatet er byttet ut med scannere, prislapper med strekkoder. Pengesedler og mynter byttes ut med kort også for denne aldersgruppen. Samtidig gjør bedret privatøkonomi at de kjøper mer og i den sammenheng møter mye matematikk, for eksempel i form av prosentregning. Aviser oversvømmes av tall knyttet til helse, bilkjøp, spørreundersøkelser, ratinger og så videre. Det ser for øvrig ut til at det arbeides noe mer med dagliglivets/hverdagens matematikk i 2003 enn i 1995 (se kap. 5.5.3). Dette er i tråd med L 97 som har matematikk i dagliglivet som et mål. Utfordringen er å knytte dette temaet til utvikling av generelle matematikkunnskaper på en fornuftig måte. Det holder sannsynligvis ikke bare å sende elevene i butikken eller be dem bake boller hjemme. Det må følges opp. Hvis vi ser på oppfølging i form av diskusjon eller retting av hjemmearbeid, ser vi i kap. 5.5.5 og i kap. 5.6.5 at dette skjer noen ganger, men ikke alltid. Ifølge TIMSS-rapporten (Grønmo mfl. 2004) ligger norske lærere betydelig under det internasjonale gjennomsnittet når det kommer til tilbakemeldinger (se også kap. 6.2.1).

Gardiner (2004) viser til bekymringsfulle rapporter fra andre land som viser at realistisk matematikkundervisning ikke oppmuntrer flere til å studere matematikk, og at de få som gjør det ser ut til å kunne veldig lite og det de kan er bemerkelsesverdig ufleksibelt. Dette er også kjente innvendinger fra norske læresteder. Representanter for næringsliv og høyere utdanning er bekymret over rekrutteringen (Rasch-Halvorsen & Johnsbråten 2006).

Mitt inntrykk er at disse representantene dog synes å sprike i synet på hva slags matematikk som trengs. Fra ren oppskriftsmatematikk til en mer generell, bred matematikkundervisning hvor dannelsesperspektivet er inne. Både nytte- og dannelsesperspektivet ligger inne i begrepet matematical literacy slik jeg oppfatter det. Det handler om å kunne orientere seg i samfunnet uten å hindres av dårlige matematikkunnskaper. Det er muligens en trend også i Norge å forsøke å bytte ut undervisning i tradisjonell matematikk med undervisning i matematical litaracy i stedet for å se dette som et produkt av opplæringen (Gardiner 2004, se kap. 3.2.2). Det vil si at det menes at tradisjonell matematikk kan byttes ut med noe mer såkalt anvendbart for alle de første årene, kanskje til og med fjernes som eget fag, og eventuelt senere undervises for de få som trenger det.

6.2.5 Prosess - produkt, forståelse - ferdigheter

En samlet analyse av TIMSS- og PISA-resultatene for land som har deltatt i begge tyder på at det er lurt å tilstrebe en balanse mellom arbeidet med fakta og ferdigheter og arbeidet med forståelse av matematiske begreper. Fokus på ferdigheter alene fører ikke automatisk til utvikling av forståelse for begreper og sammenhenger, det omvendte er heller ikke tilfelle (Grønmo 2005).

Begrepene prosess og produkt kan oppfattes på flere ulike nivåer. Prosessbegrepet kan forstås som prosessen frem mot strukturell forståelse av et matematisk begrep (jfr. Sfard 1991, kap. 2.2.1). Prosessfokus kan også oppfattes som fokus på arbeidsformer, herunder aktivitet. At prosessen blir viktigere enn produktet kan ses i en tendens til at aktivitet i seg selv blir målet for undervisningen. At matematikk kan ses som en aktivitet (Alseth mfl. 2003, se kap. 2.3.2), kan misoppfattes på denne måten. Sett fra et matematikklæringssynspunkt er det viktig at lærer hele tiden har klare planer med hva elevene skal lære i faget, aktiviteten må ha en matematikkfaglig hensikt. I artikkelen *”Gyldne sjanser og tapte øyeblikk”* av Solem & Strand (2005) gis flere eksempler på hvordan for eksempel fargelegging og andre aktiviteter kommer i veien for faglige utfordringer i matematikk og norsk. *”Det er som om forfatterne (*av læreboken disse elevene bruker*) ikke har tro på at matematikken i seg selv kan inspirere og fenge barna”*. (Solem & Strand 2005, s. 136).

I et sosiokulturelt perspektiv blir prosessen fram mot produktet med veiledning, samtale og tilbakemelding vektlagt. Prosessorientert skriving i språkfag er et eksempel på dette. Prosessberepet kan også ses i sammenheng med tanken om å oppøve en matematisk måte å tenke på, å se matematikk som en aktivitet heller enn algoritmer og regneoppskrifter (se kap. 2.2.2). Når Gardiner (2004) kritiserer *“that there shoud be a shift in emphasis from “product” to “process””* (Gardiner 2004, se kap. 3.2.2) er det dette aspektet jeg oppfatter at han snakker om. Kan endring i fokus fra produkt til prosess ha medført at ferdighetstrening er blitt underkjent? Det er i utgangspunktet ingenting ved begrepet matematisk tenkemåte som sådan som skulle tilsi dette, men ferdigheter trengs for å utføre selve beregningen og den anses muligens som mindre viktig.

Hvilken betydning har så regneferdigheter for matematisk forståelse, er de underordnet eller er de en nødvendig del? Gjennom egen erfaring som lærer har jeg sett at forståelse utvikles over tid. Det er ofte ikke mulig å starte med full forståelse, så kommer ferdighetene eller omvendt. Hvis vi tar på alvor at operasjonell forståelse (prosess i denne sammenheng) og strukturell forståelse (produkt i denne sammenheng) avhenger av hverandre, kan man ikke hoppe over for eksempel telleferdigheter og introdusere tall direkte. Regning med negative tall styrker selve begrepet negative tall (lavere nivås reifikasjon), men er også en forutsetning for videre utvikling av begrepet. Å operere med et matematisk objekt utvikler nye matematiske objekt som det igjen kan opereres på (Sfard 1991, se kap. 2.2.1).

Hvis evnen til å matematisere også er avhengig av evnen til å finne den matematiske løsning og omvendt, kan det like gjerne være sånn at ferdigheter er en forutsetning for forståelse. Innføring av algebra i skolen gjennom generalisert aritmetikk gjøres blant annet gjennom arbeid med tallmønstre, med og uten figurer og konkreter. Som nevnt i kap. 2.4.2 følger ikke syntaksen, regnereglene i algebra intuitivt fra dette innføringsperspektivet. Det er etter mitt syn til og med mulig å få til en gjensidig forsterkende virkning mellom arbeid med forståelse og anvendelse og arbeid med de formelle regnereglene. Det er ingen vits i å kunne sette opp en ligning fra en problemstilling hvis man ikke kan løse den. Samtidig er det meningsløst å kunne løse en ligning uten å vite hva det brukes til. Å overlate løsningen til kalkulatoren betyr at man mister noen av de kunnskapene som trengs for å sette opp ligningen, for eksempel forståelse for likhetstegnet og for multiplikative strukturer. Dette er en sammenheng mellom forståelse og ferdigheter som det etter mitt syn er vanskelig å komme unna. I tillegg kan arbeid med ferdigheter gi mestringsfølelse hos en del elever (se kap. 2.2.2).

Vedlikehold og konsolidering av kunnskaper er nødvendig. Tradisjonelt har hjemmelekser og prøver vært en del av dette arbeidet, i den senere tid arbeidsplanoppgaver som utføres på skolen. Figurene i kap. 5.5.5 viser ingen stor endring på leksesiden unntatt nettopp det at flere i 2003 begynner med leksene på skolen. Prøvehyppigheten ser ut til å ha avtatt noe. Prøver brukes tradisjonelt også i sterkere grad i vurderingssammenheng enn lekser. Nye vurderingsformer kan være en forklaring på denne forskjellen. Det er ønskelig slik jeg ser det at arbeidet med konsolidering og vedlikehold bærer preg av variasjon i tilnærminger (se kap. 2.3.7) samtidig som mengdetrening ikke er til å unngå.

I L 97 er ikke såkalte tabellkunnskaper vektlagt like sterkt som tidligere, man snakker for eksempel om å forstå multiplikasjon uten å kunne tabellen. Man skulle tro at en god innlæring i multiplikasjon ville være en ”ja, takk begge deler”. Forståelse vil lette arbeidet med automatiseringen og gode teknikker for å huske noe bør nettopp bygge på forståelse. Det skulle ikke være noe i veien for at skolen veileder i slike teknikker også, slik at elever ser at det er lettere å lære seg 6-gangen ved å tenke at man legger til 6 hver gang. Papirregning har den fordelen i forhold til kalkulator at ulike tabellkunnskaper anvendes og dermed vedlikeholdes. Papirregning betyr ikke nødvendigvis innlæring av like regnealgoritmer, men kan for eksempel bygge på hoderegningsstrategier og dermed også som sagt være med på å vedlikeholde disse (McIntosh 2004, se kap. 2.3.6).

Bruk av kalkulator og overslagsregning i hodet for å sjekke om svaret er troverdig, ser ut til bare delvis å ha vært vellykket. Grunnen er vel slik jeg ser det at mange elever etter hvert stoler fullt ut på kalkulatoren og lar være å vurdere svaret. Dessuten mener jeg at Gardiner (2004) har rett i at det er meningsløst å tenke at noen skal kunne regne sånn cirka uten å ha kunnskap om hvordan man regner eksakt og at det er noe som heter eksakt regning. I oppgaveanalysen av talloppgaver dukket denne problemstillingen opp noen ganger, for eksempel oppgavene 22043 og K1 i kap. 5.2.2 og oppgave I5 i kap. 5.2.4. En annen ting Gardiner (2004) kritiserer er tesen om at kunnskaper i regning med desimaltall og brøk ikke lenger er nødvendig. Brøker kan konverteres til desimaltall og begge ”talltypene” kan regnes på kalkulator. Når man tar i betraktning mine resultater for oppgaver som tester dette, kan det se ut til at denne typen regneferdigheter er tonet ned i norsk skole. I tillegg til kalkulatorbruk kan dette også handle om problemer knyttet til å finne gode anvendelseseksempler for denne type oppgaver (Brekke mfl. 1998). Desimaltallkunnskap lider muligens også under at øremynter i praksis ikke lenger er i bruk.

6.2.6 Mer om kalkulator og elevbok

Mine resultater når det gjelder tallregning viser en tydelig negativ utvikling fra 95 til 03 (se kap. 5.2.4). I matematikkundervisningen etter L 97 er kalkulator foreslått fra 2. klasse mens det i M 87 kommer for fullt i ungdomsskolen (se kap. 3.2.4). Hvis vi ser på elevsvarene og lærersvarene, ser vi at andelen som bruker kalkulator hver dag har økt betydelig (se kap. 5.5.4 og kap. 5.6.4). I tillegg skal elevene kunne bruke en såkalt elevbok til prøver og eksamen. Jeg tror mange elever tillates å bruke kalkulator på alle tekstoppgaver og problemløsningsoppgaver med den tanke at her teller ikke utregningen. Dette betyr at den dagen elevene trenger sine regneferdigheter til noe meningsfylt, slipper de å bruke dem. Jeg tror det er nyttig å balansere litt her, utregning er også en viktig del av matematikkoppgaver. I denne sammenheng er vektlegging av prosess muligens blitt for sterk.

Elevene bør utvikle selvtillit nok til at de stoler på seg selv uten hjelp av diverse oppslag. I mange yrker og i livet ellers er tillitt til egne kunnskaper og egen hukommelse viktig. For å kunne utvide skjema, gå fra det kjente til ny kunnskap, må det ligge noe der fra før (Vygotsky, Piaget, se kap. 2.1.5). Det er blant annet dette ”å lære å lære” handler om. Oppslagsverk, regelbøker og kalkulator kan misbrukes dit hen at ingenting trengs å lagres, dermed kan det bli vanskeligere å lære nye ting. Det som slås opp, er gjerne en ferdig oppskrift og det er fristende å døpe dette til ”slå opp og herm-pedagogikk”. Bruk av kalkulator og regelbøker behøver absolutt ikke å resultere i slik pedagogikk. Det er selvsagt viktig å arbeide med å løse problemer uten hele tiden å vektlegge selve utregningen. Kalkulatoren er i tillegg et godt utforskingsverktøy for å finne sammenhenger mellom tall, arbeide med regnerekkefølge, parenteser og lignende. Dette poenget understrekes i L 97. Utarbeidelse av elevbøker kan fungere som en integrert del av opplæringen og være en del av konsolideringsprosessen.

Ideen bak spiralprinsippet bygger på tanken om at all læring skjer i relasjon til tidligere læring i tråd med et konstruktivistisk syn. I skolens planer har dette vært praktisert slik at man stadig kommer tilbake til samme emneområde og bygger på med litt nytt. Overdrives dette kan det lett kan bli oppstykket og kjedelig. Dessuten blir det brukt for lite tid til konsolidering. Neste gang temaet dukker opp, er det meste glemt.

All matematikk er i virkeligheten abstrakt, å tro man kan unngå det helt ved hjelp av konkreter, halvkonkreter og halvabstrakter kan synes naivt. At dette er gode hjelpemidler for mange elever, er en annen sak. Det at den samme matematikken kan brukes på så mange ulike felt er nettopp matematikkens styrke. Innsikt i det kan muligens hindres hvis all matematikkundervisning hele tiden knyttes opp til en bestemt anvendelse (se kap. 3.2.2).

7. Oppsummering

7.1.1 Svar på forskningsspørsmål

Min oppgaveanalyse viser en endring i tall og algebrakunnskaper for norske åttendeklassinger og den er nesten entydig negativ. Algebra og tallregning er de områdene som har størst tilbakegang (se kap. 5.4). Innen tallkunnskaper gjelder dette spesielt for desimaltall (se kap. 5.2.4). Også andre kategorier som proporsjonalitet, andeler med tekst og tallstørrelse/overslagsregning viser en relativt klar tilbakegang (se kap. 5.2). Innenfor algebra er det kun i kategorien funksjoner det ikke er målbar tilbakegang (se kap. 5.3).

Læreplanene synes å være en del av forklaringen. Algebra er ikke vektlagt i samme grad i L 97 som i M 87 (se kap. 3.2.4). En del av nedgangen innenfor algebra skyldes naturlig nok dette. Siden det også er en nedgang i tallforståelse, vil det påvirke algebrakunnskaper og være en annen mulig forklaring. Trender i læreplan som økt fokus på generaliseringsperspektivet ved algebra og mindre vektlegging av trening på syntaks, ser ikke ut til å ha virket etter intensjonen om mer forståelse (se kap. 3.2.4). Formell skriftlig tallregning er tonet ned og erstattet med hyppigere bruk av kalkulator. Selv om intensjonen har vært å kombinere hoderegning og uformelle skriftlige regnestratregier med kalkulator kan det se ut til at dette ikke har lyktes (se kap. 3.2.4). En betydelig økning i bruk av kalkulator bekreftes av elever og lærere i min undersøkelse (se kap. 5.5.4 og 5.6.4). Tradisjonell brøkregning av typen å addere brøker med ulik nevner er tonet ned allerde i M 87. Her gjør norske elever det dårlig i 1995 og tendensen forsterkes ytterligere.

Både M 87 og L 97 kan sies å være preget av et konstruktivistisk læringssyn. Spesielt L 97 er preget av kognitiv konstruktivisme gjennom sitt fokus på enkeltindividet. Begge læreplanene er opptatt av praktiske eksempler og bruk av konkreter. Det konstruktivistiske læringssyn kommer også tydelig fram i vektleggingen av utprøvende, undersøkende aktiviteter som skal skape undring og lærelyst hos elevene. Her ses en klar dreining fra M 87 til L 97. Samtidig er L 97 på noen områder preget av sosiokulturelle teorier som viser seg for eksempel i økt vektlegging av samtale, problembasert læring og syn på læring som en prosess (se kap. 3.2.2).

Matematikksynet er i større grad preget av å se på matematikk som en aktivitet og mindre som et sett med fakta, ferdigheter og prosedyrer. Her er det et tydelig skille mellom M 87 og L 97. En matematisk tenkemåte er målet i L 97, matematikk ses på som et sosialt produkt og ikke som noe fast og uforanderlig (se kap. 3.2.2). Pugging og automatisering av for eksempel tabellkunnskaper er eksempler på ting som tones ned i L 97 (se kap. 3.2.4). Dette er sterkere vektlagt i M 87. Samtidig viser lærersvarene at lærerne i 2003 var mer tilbøyelig til å se på matematikk som et sett med regler og algoritmer enn de var i 1995 (se kap. 5.6.2).

Arbeidmåter foreslås i M 87. L 97 er noe mer styrende (se kap. 3.2.3). Prosjektarbeid er en viktig arbeidsform i L 97, men anbefales også i M 87. Samtidig økes vektleggingen av tilpasset opplæring noe som kan være forklaring på at elevsvar og lærersvar i min undersøkelse viser en klar dreining mot mer individuelt arbeid (se kap. 5.5.3 og 5.6.3). Lærerrollen forskyves fra formidler til veileder (se kap. 3.2.2), noe som også innebærer andre arbeidsmåter. Organisering av undervisningen er preget av at negativt syn på helklassesamtale, såkalt tavleundervisning og mot mer bruk av individuelle arbeidsplaner. Endring fra uketimer (M 87) til årstimer (L 97) oppmuntrer til alternative måter å organisere undervisningen på (se kap.3.2.3). Her spiller den økende vektlegging av tverrfaglighet også inn.

7.1.2 Veien videre

Arbeidet med oppgaven har gitt noen svar samtidig som nye spørsmål dukker opp. Jeg vil her se på noen mulige nye spørsmål som springer ut av mine resultater og drøftinger.

I de nyeste læreplanene som trer i kraft i 2006 økes timetallet i matematikk i grunnskolen, fra 1387 45-minutters enheter til 1125 60-minutters enheter. Hele økningen er på barnetrinnet. Dette skulle tilsi at det bør være mulig å få en forbedring i opplæringen i grunnleggende tallforståelse og tallregning. I L 06 er det *å kunne regne* en av fem grunnleggende ferdigheter som skal integreres også i de andre fagene.

En annen endring er at tall og algebra er et hovedområde i 5. – 7. klasse. I L 97 blir ordet algebra først brukt som målområde for ungdomstrinnet (se kap. 3.2.4). Dette vil forhåpentligvis øke bevisstheten rundt arbeidet med innføring av algebraisk tenkning. Et eksempel er arbeid med variabelbegrepet gjennom bruk av referanseceller i sammenheng med regneark. Samtidig innebærer den økende bruk av regneark også muligheter for at man skyter spurv med kanoner. Å bruke regneark på oppgaver som løses mye raskere på andre måter kan virke mot sin hensikt. Det er behov for mer forskning av effekten av bruk av ulike tekniske hjelpemidler.

Under formål for faget står det at *"Opplæringen veksler mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter og ferdighetstrening."* (L 06, s. 53). Det er å håpe at en god balanse mellom ferdighetstrening og andre aktiviteter som fremmer forståelse vil prege matematikkopplæringen.

L 06 gir de enkelte skoler og skoleeier større innflytelse på valg av organisering, arbeidsmåter og metoder enn L 97. Læreplanens hovedområder har kompetansemål for 2., 4., 7. og 10. årstrinn i grunnskolen. Den enkelte skole og skoleeier står dermed relativt fritt med hensyn på når det skal arbeides med de enkelte emner. Kompetansemålene er generelle og åpne. Det interessante blir å følge med på om dette vil medføre større forskjeller fra skole til skole. Blir læreboka enda mer styrende siden så mye av innholdet fastsettes lokalt? Her trengs det etter mitt syn forskning.

Det ser ikke ut til at tendensen med individuelle planer, studietid og mindre helklasseundervisning snur, i alle fall ikke foreløpig. Denne utviklingen kan etter mitt syn som nevnt ha flere negative sider (se kap.6.2.1). Såkalte demonstrasjonsskoler og bonusskoler melder ofte om gode resultater fra forsøk med nye organisasjonsmåter. Disse aktørene er kanskje ikke alltid helt objektive i sine tilbakemeldinger, så mer forskning utenfra som fokuserer på det faglige utbyttet av endringer i organisering er etter mitt syn ønskelig.

Som nevnt i kapittel 3.1.1 har Norge fått et lite Sputniksjokk med hensyn på realfagskompetansen og realfagsinteressen hos dagens ungdom. Økt satsing på å bedre matematikkompetansen hos lærere og elever er en følge av dette. I lærersammenheng er det viktig å se på de ulike lærerutdanningene. Er utbyttet av undervisningen gode kunnskaper i matematikk og matematikkdidaktikk? Dette er også et nødvendig område å forske mer på.

IEA (se kap. 1.1) som står bak TIMSS har satt i gang et prosjekt som kalles *TEDS-M (Teacher Education and Development Study – Mathematics).* Dette er en internasjonal undersøkelse som legger vekt på forbindelsen mellom utdanningspolitikk, utdanningspraksis og utbytte. Målgruppene er lærerutdanningene, lærerutdannere og kommende lærere (TEDS-M 2008). Norsk deltagelse i denne undersøkelsen er et mulig alternativ for å innhente mer kunnskap om dette feltet.

Målet er å oppnå god opplæring for alle i matematikk. Denne hovedfagsoppgaven viser at det er mange utfordringer framover. Samtidig gjøres det mye godt arbeid på ulike nivåer av aktører som ser på dette faget som morsomt, spennende og viktig.

8. Referanser/Litteraturliste

Alseth, B. (1998): *Matematikk på småskoletrinnet.* Nasjonalt læremiddelsenter

Alseth, B., Breiteig, T., Brekke, G. (2003): *Evaluering av Reform 97.* Telemarksforskning, Notodden, Norge

Behr, M., Post,T., Harel, G., Lesh, R. (1993): Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis – Emphasis on the Operator Consruct. I Carpenter,T., Fennema, E., Romberg, T. (red): *Rational Numbers An Integration of Research.* Laurence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey

Bencze, J. L. (2004): http://tortoise.oise.utoronto.ca (besøkt 06.08.04)

Billington, M.(2000): *Teaching the Concept of Function. Use of the Graphic Calculator to assist learning.* Hovedfagsoppgave i realfagsdidaktikk, Universitetet i Oslo

Björkqvist, O. (1993): Social konstruktivism som grund for matematikundervisning. *Nomad,* Vol. 1, nr1 1993, s 8 - 16

Blomhøj, M.(2004): Mathematical Modelling – a Theory for Practice. I Clarke, B., Clarke, C.,Emanuelsson, G., Johansson, B., Lambdin, D., Lester, F., Wallby, A., Wallby, K. (red.): *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics.* NCM Göteborg

Botten, G. (1999): *Meningsfylt matematikk.* Caspar forlag

Braathe, H. J., Ongstad, S. (2001): Egalitarism meets ideologies of mathematical education – instances from Norwegian curricula and classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Matematik,* 33(5), s. 147-157

Brekke, G., Gjone, G., (2001): Matematikk. I Sjøberg, S., (red.) *Fagdebatikk - Fagdidaktisk innføring i sentrale skolefag.* Gyldendal Norsk Forlag

Brekke, G., Grønmo, L. S., Rosén, B. (2000): *Kartlegging av matematikkforståelse Veiledning til algebra.* Nasjonalt læremiddelsenter

Brekke, G., Kobberstad, T., Lie, S., Turmo, A.(1998):*Hva i all verden kan elevene i matematikk.* Universitetsforlaget AS

Chazan, D., Yerushalmy, M., (2003 snd edition): On Apprecciating the Cognitive Complexity of School Algebra: Research on Algebra Learning and Directions of Curricular Change. I Kilpatrick, J., Martin, W.G., Schifter, D. (red.): *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM, USA

Christiansen, U. (2004): *Many different number concepts – or one integrated?* Foredrag / paper ved konferansen ICME – 10, København, Danmark, juli 2004

Dörfler, W. (2004): Objectifying Relations: Fractions as Symbols for Actions. I Clarke, B.,

Clarke, C.,Emanuelsson, G., Johansson, B., Lambdin, D., Lester, F., Wallby, A., Wallby, K. (red.): *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics.* NCM Göteborg

Ernest, P. (1998): *Social constructivism as a philosophy of mathematics.* State University of New York Press, Albany, USA

Ernest, P. (2004): *The psychology of learning mathematics.* University of Exeter. UK

Filloy, E., Sutherland, R. (1996): Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra. I Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (red): *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. Nederland

Fuson, K. (2003 snd edition): Developing Mathematical Power in Whole Number Operations. I Kilpatrick, J., Martin, W.G., Schifter, D. (red.): *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM, USA

Gardiner, A. (2004): *What is mathematical literacy?* Foredrag ved konferansen ICME-10, København, Danmark, juli 2004

Gjone, G. (1997): *Veiledning til funksjoner.* Nasjonalt læremiddelsenter

Goodlad, J. and Associates (1979): *Curriculum inquiry*: *The Study of Curriculum.* Bole

Gravemeijer, K., van Galen, F. (2003 snd edition): Facts and Algoritms as Products of Students' Own Mathematical Activity. I Kilpatrick, J., Martin, W.G., Schifter, D. (red.): *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM, USA

Grønmo, L.S. (2005): Ferdighetenes plass i matematikkundervisningen. *Nämnaren,* 32(4), s. 38 - 44

Grønmo L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli, Lie, S., Turmo, A. (2004) : *Hva i all verden har skjedd i realfagene?* Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling UIO

Gundem, B. (1990): *Læreplanpraksis og læreplanteori*, Practice

Hovik, E. K. (2003): *Innføring av regning med negative tall i norsk skole.* Prosjekt Ma 215 Universitetet i Oslo

Høines, M. J.(1998): *Begynneropplæringen.* Caspar forlag, Bergen

Keijzer, R., van Galen, F., Oosterwaal, L. (2004): *Reinvention revisted.* Foredrag ved konferansen ICME -10, København, Danmark, juli 2004

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen R.V., Roe, A., Turmo, A. (2004): *Rett spor eller ville veier? Norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2003.* Universitetsforlaget

Klette, K. (2004): Lærerstyrt kateterundervisning fremdeles dominerende? Aktivitets- og arbeidsformer i norske klasserom etter Reform 97. I Klette, K (red.): *Fag og arbeidsmåter i endring? Tidsbilder fra norsk grunnskole.* Universitetsforlaget, Oslo

KUD (1988) *Mønsterplan for grunnskolen.* Aschehoug & co, Oslo

KUF (1996) *Læreplanværket for den tiårige grunnskolen.* Nasjonalt læremiddelsenter

Lagerstrøm, B (2000): *Kompetanse hos lærere i grunnskolen.* www.ssb.no (besøkt 21.01.06)

Lie, S., Kjærnsli, M., Brekke, G. (1997): *Hva i all verden skjer i realfagene?* ILS, Universitetet i Oslo

McIntosh, A. (2004): *Number sense.* Foredrag ved konferansen ICME -10, København, Danmark, juli 2004

Mellin-Olsen, S. (1993): *Kunnskapsformidling Virksomhetsteoretiske perspektiver.* Caspar forlag

PISA 2003 : www.pisa.no (besøkt 20.03.06)

Rasch-Halvorsen, A., Johnsbråten, H. (2006): *Norsk matematikkråds undersøkelse. Høsten 2005.* www.mi.uib.no (besøkt 20.03.06)

Sfard, A.(2000): Symbolizing Mathematical Meaning into Being-Or How Mathematical Objects Create Each Other. I Cobb, P., Yackel, E., McClain, K. (red.): *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Sfard, A.(1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, s. 1 – 36, Kluwer Academic Publishers, Nederland

Smith, E. (2003 snd edition): Stasis and Change: Integrating Patterns, Functions, and Algebra Throughout the K-12 Curriculum. I Kilpatrick, J., Martin, W. G., Schifter, D. (red.): *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM, USA

Solem, I. H., Strand, T. (2005): Gyldne øyeblikk og tapte sjanser.I Skjong, S. (red.): *GLSM Grunnlegende lese, skrive og matematikkopplæring.* Det norske samlaget, Norge

Stephens, M. (2004):The Importance of Generalisable Numerical Expressions. I Clarke, B., Clarke, C., Emanuelsson, G., Johansson, B., Lambdin, D., Lester, F., Wallby, A., Wallby, K. (red.): *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics.* NCM Göteborg

Säljö, R. (2000): *Lärande i praktiken, ett sociokulturelt perspektiv,* Prisma, Stockholm

Säljö, R. (2001): *Læring i praksis, et sosiokulturelt perspektiv,* Cappelen, Oslo

TEDS-M 2008: www.iea.nl (besøkt 09.05.06)

Thompson, P., Saldanha, L. (2003 snd edition): Fractions and Multiplicative Reasoning. I Kilpatrick, J., Martin, W.G., Schifter, D. (red.): *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM, USA

Thorpe, J. A. (1989): Algebra: What Should We Teach and How Should We Teach It? I Wagner, S., Kieran, C. (red.): *Research issues in the learning and teaching of algebra.* The National Council of Teachers of Mathematics. INC, USA

TIMMS 2003: www.timss.no (besøkt 20.04.06)

Utdanningsdirektoratet (2005): *Kunnskapløftet*

Verschaffel, L., De Corte, E. (1996): Number and Arithmetic. I Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (red): *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. Nederland

Wheeler, D. (1996): Backwards and forwards: Reflections on Different Approaches to Algebra. I Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (red.): *Approaches to Algebra Perspectives for Research and Teaching,* Kluwer Academic Publishers, Nederland

9. Appendiks

Tabell 4.A Oversikt over antall talloppgaver

Kategori	**Omhandler**	**Antall oppgaver 95**	**Antall oppgaver 03**
Proporsjoner og forhold	Tekstoppgaver hvor forståelse av forhold som en multiplikativ struktur kreves.	5	6
Andeler med halvkonkreter	Skyggelegging Forståelse av brøk som angivelse på del av hele Likeverdige brøker	6	2
Andeler med tekst	Tekstoppgaver Forståelse av brøk som angivelse på del av hele Likeverdige brøker	4	5
Plassering på tallinje, overslagsregning	Plassering av heltall, brøk og desimaltall	12	7
Tallregning (pluss og minus)	Addisjon og subtraksjon av heltall, brøk og desimaltall	8	6
SUM		**35**	**26**

Tabell 4.B Oversikt over antall algebraoppgaver

Kategori	**Omhandler**	**Antall oppgaver 95**	**Antall oppgaver 03**
Likninger av første grad med en ukjent	Oppgaver som går ut på å finne en ukjent	5	6
Mønstre uten figurer	Tallfølger gitt som tall Tallpar	3	6
Mønstre med figurer	Tallfølger illustrert med geometriske figurer eller brikker	3	10
Innsetting, regning med negative tall	Erstatte en ukjent med oppgitt tall Underkategori: Regne med negative tall	2	5
Funksjoner	Avlesing av grafer, tolking av tabeller for x og y der y er en funksjon av x	4	6
SUM		**17**	**33**

Tabell 5.A: Oversikt over talloppgavers plassering emnemessig, heltall

HELTALL			
Plassverdi	Snu	12028,E4	
	Avrunding	N11	C6,H9
De fire regnearter	Addisjon		
	Subtraksjon	12028,E4,R12	

Tabell 5.B: Oversikt over talloppgavers plassering emnemessig, brøk

BRØK			
Andeler av hele	Halvkonkreter	Kun andel	22043, K1,F12
		Forstå likeverdighet	12001,A1,H8,B9,N19
		Finne hel først	12001, A1
		% som 100 del	
	Tekstoppgaver	Kun andel	32064,R13
		Forstå likeverdighet	12027,E3
		Finne hel først	12041,G5,32727,V3
		% som 100 del	32570
Som tall	Vurdere størrelse	22012,I6	
	Sammenlikne størrelse	22104,D9,M4,N14,(Q8)	
Relasjon / forhold	Veien om en	32533,32704,B8,32701	
	A:b=m:n	Bruke formel	12004,A4,D8
		Oppgitt total, finn a eller b	32160,22106,M6,32701
		Proporsjonalitet fra tabell	L14
Sammenheng med desimaltall	Omgjøring	12016,C4,32725	
	Sammenlikning	12016,C4	
Sammenheng med prosent			
Sum og differens	K9,L17,32416,32094, 22066		

Tabell 5.C: Oversikt over talloppgavers plassering emnemessig, desimaltall

DESIMALTALL			
Enkel anvendelse			
De fire regnearter	Addisjon	Med likt antall desimaler	
		Med ulikt antall desimaler	22046
	Subtraksjon	Med likt antall desimaler	22010,I5,R6
		Med ulikt antall desimaler	
Plassverdier	Størrelsesvurderinger	22198,B10,Q8,F9,L9	
	Avrunding	32670,22144,O4	
Sammenheng med brøk	Sammenlikning	12016,C4	
	Omgjøring	12016,C4,P16	

Tabell 5.D Oversikt over algebraoppgavers plassering emnemessig

LIKNINGER			
Balansere halvkonkreter			A2/12002, 32424
Oppstilte	Med parentes	Ett ledd på h. side	22253, 32540, O7
		Flere ledd på h. side	L16
Formel	Snu	Sett inn tall	Q7
	Tolke		32210
	Innsetting		12040/G4
MØNSTER			
Uten figurer	Oppgitt tallfølge	Finne neste tall	22008, I4
		Beskrive tallrekken	32273
	Påfølgende tall eller partall	Beskrevet som likning	22002, I1
		Finne summen	32047
	Intervall	Nytt intervall	32673
	Tallparsystem	Beskrive system	12029/E5
Med figurer	Tabellutfylling		22261a, S1a,32757
	Tabelltolkning	Lese av	22261b, S1b,33760
	Generalisering	Finn fig n	32761
		Gitt høy n	22261c, 12017,C5, 32640
Innsetting	Utregning	Negativ x	12042/G6
		Positiv x	N13, 32538
Negative tall	Multiplikasjon/divisjon		12042/G6, 32525
		Regnerekkefølge	32612

	Sum		32643
Funksjoner	Tabell	Til formel	32163, H10
		Tolke	J18
	Situasjon	Til formel	D10, 32477
		Til graf	32637a
	Graf	Avlesing	32677 b, c, 12025, E1